ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA
IEE 2613
Control Automático
Primer Semestre 2015

Ayudantía 1

Profesor: Matias Negrete Pincetic
Ayudante: Rodrigo Henríquez Auba

Problema 1.

Los trenes con levitación magnética proporcionan una alternativa de alta velocidad y muy baja fricción en comparación con las ruedas de acero sobre rieles de acero. El tren flota en un colchón de aire. La fuerza de levitación está controlada por la corriente i en la bobinas de levitación y se puede aproximar por:

$$F_L = k\left(\frac{i}{z}\right)^2$$

donde z es el espacio de aire entre el tren y el piso. Considere que la masa del tren se centra en un punto y tiene un valor m.

a) Determine el modelo dinámico.

b) Determine el modelo linearizado para un punto de operación z_0.

c) Encuentre la función de transferencia $Z(s)/I(s)$.

Solución:

a) Aplicando Segunda Ley de Newton:

$$\begin{aligned} m\vec{a} = m\ddot{z} &= \sum \vec{F} \\ &= k\left(\frac{i}{z}\right)^2 - mg \end{aligned}$$

De esta forma se tiene:

$$\frac{k}{m}\left(\frac{i}{z}\right)^2 - g - \ddot{z} = f(z, i, \ddot{z}) = 0$$

b) El sistema se encontrará en equilibrio si $\dot{z}_0 = \ddot{z}_0 = 0$. Por lo tanto la corriente en el equilibrio i_0 será:

$$\frac{k}{m}\left(\frac{i_0}{z_0}\right)^2 - g = 0 \;\rightarrow\; i_0 = z_0\sqrt{\frac{mg}{k}}$$

Si ponemos $(z_0, i_0, \ddot{z}_0) = \mathbf{x_0}$ y se linealiza:

$$\begin{aligned}
0 &= f(z_0, i_0, \ddot{z}_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{\mathbf{x_0}} \Delta z + \left.\frac{\partial f}{\partial i}\right|_{\mathbf{x_0}} \Delta i + \left.\frac{\partial f}{\partial \ddot{z}}\right|_{\mathbf{x_0}} \Delta \ddot{z} \\
&= 0 - \left.\frac{2ki^2}{mz^3}\right|_{\mathbf{x_0}} \Delta z + \left.\frac{2ki}{mz^2}\right|_{\mathbf{x_0}} - 1 \cdot \Delta \ddot{z} \\
&= -\frac{2ki_0^2}{mz_0^3}\Delta z + \frac{2ki_0}{mz_0^2}\Delta i - \Delta \ddot{z}
\end{aligned}$$

Si notamos que $i_0^2 = z_0^2 mg/k$ se tiene que:

$$\Delta \ddot{z} = -\frac{2g}{z_0}\Delta z + \frac{2g}{i_0}\Delta i$$

c) Aplicando Transformada de Laplace:

$$s^2 Z(s) = -\frac{2g}{z_0} Z(s) + \frac{2g}{i_0} I(s)$$

Despejando se tiene:

$$\frac{Z(s)}{I(s)} = \frac{2g/i_0}{s^2 + \frac{2g}{z_0}}$$

Problema 2

Se posee un sistema de dos estanques cónicos, el que se puede apreciar en la Figura 1.

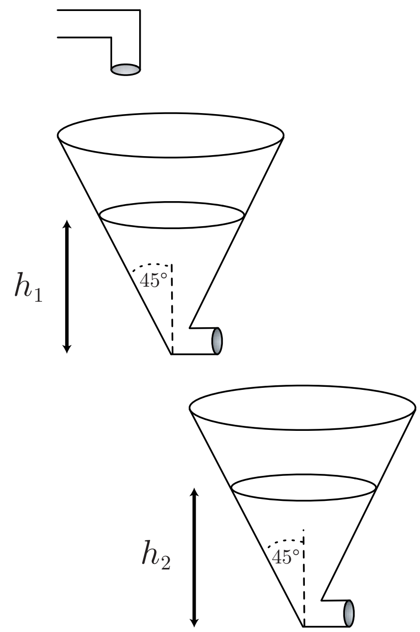

Figura 1: Sistema de dos estanques cónicos.

El flujo de líquido que entra al estanque 1 por unidad de tiempo es $u(t)$. La sección transversal de las salidas de los estanques es $A = 1$. Asuma $g = 10$, velocidad en la superficie del fluido $= 0$ y densidad del liquido constante.

a) Encuentre las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema.

b) Determine el punto de operación en que las alturas de los estanques son constantes y $u(t) = 10$.

c) Linealice el sistema en torno a este punto de operación.

d) Encuentre la función de transferencia de la altura del segundo estanque referida a la entrada $u(t)$ para el sistema linealizado.

Solución:

a) Por balance de masas tenemos que la variación del volumen en el estanque 1 tiene que ser igual al flujo de líquido que entra, $u(t)$, menos el flujo de liquido que sale, q_0. Esto es análogo para el estanque dos, donde definiremos el flujo de liquido saliente como q_1. Entonces:

$$\dot{V}_1 = u(t) - q_0$$

$$\dot{V}_2 = q_0 - q_1$$

Como nos interesa estudiar el comportamiento de las alturas de los estanques expresaremos $\dot{V}_1$ y $\dot{V}_2$ en función de las alturas correspondiente. Utilizando la ecuación del volumen de un cono:

$$V_1 = \frac{\pi r^2 h_1}{3}$$

pero dada la geometría del cono sabemos que $r = h_1$, entonces:

$$V_1 = \frac{\pi h_1^3}{3} \;\rightarrow\; \dot{V}_1 = \pi h_1^2 \dot{h}_1$$

Análogamente para el estanque dos:

$$\dot{V}_2 = \pi h_2^2 \dot{h}_2$$

Falta determinar los caudales q_0 y q_1, utilizando la ecuación de Bernoulli en el estanque 1:

$$\frac{v_s^2 \rho}{2} + P_2 + \rho g h_1 = \frac{v_0^2 \rho}{2} + P_0$$

Como se asume que la velocidad que la velocidad en la superficie es 0, y como sabemos que las presiones en ambos puntos son iguales (presión atmosférica), tenemos que:

$$v_0 = \sqrt{2gh_1} \;\rightarrow\; q_0 = A \cdot v_0 = \sqrt{2gh_1}$$

Análogamente para el estanque dos:

$$q_1 = \sqrt{2gh_2}$$

Finalmente las ecuaciones que describen el sistema son:

$$\pi h_1^2 \dot{h}_1 = u(t) - \sqrt{2gh_1}$$

$$\pi h_2^2 \dot{h}_2 = \sqrt{2gh_1} - \sqrt{2gh_2}$$

b) Para encontrar el punto de equlibrio, hacemos $\dot{h}_1 = \dot{h}_2 = 0$ y $u = 10$. De la primera ecuación:

$$0 = 10 - \sqrt{2gh_1^*} \;\rightarrow h_1^* = 5$$

Y de la segunda ecuación:

$$\sqrt{2gh_1^*} = \sqrt{2gh_2^*} \;\rightarrow\; h_2^* = h_1^* = 5$$

c) Para linealizar ponemos:

$$\pi h_1^2 \dot{h}_1 - u(t) + \sqrt{2gh_1} = f_1(h_1, u, \dot{h}_1) = 0$$

$$\pi h_2^2 \dot{h}_2 - \sqrt{2gh_1} + \sqrt{2gh_2} = f_2(h_1, h_2, \dot{h}_2) = 0$$

Luego utilizando el punto de equilibrio $\mathbf{x_0} = (h_1^*, h_2^*, u^*, \dot{h}_1, \dot{h}_2) = (5, 5, 10, 0, 0)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
0 &= f_1(\mathbf{x_0}) + \left.\frac{\partial f_1}{\partial h_1}\right|_{\mathbf{x_0}} \Delta h_1 + \left.\frac{\partial f_1}{\partial u}\right|_{\mathbf{x_0}} \Delta u + \left.\frac{\partial f_1}{\partial \dot{h}_1}\right|_{\mathbf{x_0}} \Delta \dot{h}_1 \\
&= 0 + \sqrt{\frac{g}{2h_1^*}} \Delta h_1 - 1 \cdot \Delta u + \pi h_1^{2*} \Delta \dot{h}_1 \\
&= \Delta h_1 - \Delta u + 25\pi \Delta \dot{h}_1
\end{aligned}$$

Para la segunda ecuación:

$$
\begin{aligned}
0 &= f_2(\mathbf{x}_0) + \left.\frac{\partial f_2}{\partial h_1}\right|_{\mathbf{x_0}} \Delta h_1 + \left.\frac{\partial f_2}{\partial h_2}\right|_{\mathbf{x_0}} \Delta h_2 + \left.\frac{\partial f_2}{\partial \dot{h}_2}\right|_{\mathbf{x_0}} \Delta \dot{h}_2 \\
&= 0 - \sqrt{\frac{g}{2h_1^*}}\Delta h_1 + \sqrt{\frac{g}{2h_2^*}}\Delta h_2 + \pi h_2^{2*}\Delta \dot{h}_2 \\
&= -\Delta h_1 + \Delta h_2 + 25\pi\Delta \dot{h}_2
\end{aligned}
$$

d) Nos piden la función de transferencia $H_2(s)/U(s)$. Aplicando LT a la primera ecuación:

$$
0 = H_1(s) - U(s) + 25\pi s H_1(s) \ \rightarrow H_1(s) = \frac{U(s)}{25\pi s + 1}
$$

Reemplazando $H_1(s)$ en la segunda ecuación:

$$
0 = -H_1(s) + H_2(s) + 25\pi s H_2(s)
$$

$$
0 = -\frac{U(s)}{25\pi s + 1} + H_2(s)(25\pi s + 1) \ \rightarrow \ \frac{H_2(s)}{U(s)} = \frac{1}{(25\pi s + 1)^2}
$$

Problema 3

Considere una planta $G(s)$ con la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{0.014}{s^2 + 0.028s}$$

Considere el sistema cerrado que se muestra en la Figura 2:

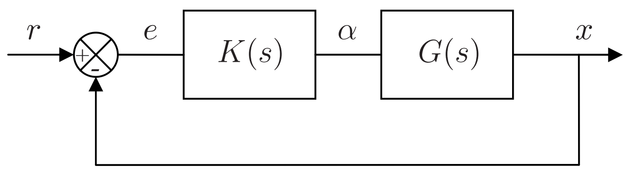

Figura 2: Diagrama del sistema.

Si el controlador es de la forma $K(s) = K$, con K una constante positiva.

a) Obtenga la función de transferencia del sistema cerrado $T(s) = X(s)/R(s)$.

b) Calcule el error permanente cuando se presenta un escalón de monto a en la referencia $r(t)$. Asuma que el sistema en lazo cerrado es estable.

Solución:

a) De acuerdo a las variables definidas en la Figura 2 se tiene que:

$$E(s) = R(s) - X(s)$$
$$X(s) = K(s) \cdot G(s) \cdot E(s)$$

Reemplazando $E(s)$ en la segunda ecuación se tiene:

$$X(s) = K(s)G(s)[R(s) - X(s)]$$
$$X(s)[1 + K(s)G(s)] = K(s)G(s)R(s)$$
$$T(s) = \frac{X(s)}{R(s)} = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)}$$

Reemplazando se tiene:

$$T(s) = \frac{0.014K}{s^2 + 0.028s + 0.014K}$$

b) Se pide calcular el error permanente cuando se presenta un escalón de monto a en la referencia. Dado el diagrama, el error se define como:

$$e(t) = r(t) - x(t)$$

El error permanente, o en régimen permanente, será:

$$\lim_{t \to \infty} e(t)$$

Como asumimos que el sistema es estable, se puede utilizar el teorema del valor final, esto es:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

Por lo tanto, a partir del resultado anterior:

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - R(s)\frac{K(s)G(s)}{1+K(s)G(s)} \\ &= \frac{R(s)}{1+K(s)G(s)} \end{aligned}$$

Reemplazando y teniendo en cuenta que $R(s) = a/s$ se tiene que:

$$E(s) = \frac{a}{s} \cdot \frac{s^2 + 0.028s}{s^2 + 0.028s + 0.014K}$$

Calculamos entonces:

$$\lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} a \cdot \frac{s^2 + 0.028s}{s^2 + 0.028s + 0.014K} = 0$$

Luego el error permanente del sistema en este caso es 0.

Problema 4

Considere el mismo sistema de la Pregunta 3, con un controlador $K(s) = 1$. Obtenga el tiempo de peak y el monto de sobreoscilación (overshoot) del sistema cuando este es sometido a un escalón unitario.

Solución:

La función de transferencia del sistema ya calculado es:

$$T(s) = \frac{X(s)}{R(s)} = \frac{0.014K}{s^2 + 0.028s + 0.014K} = \frac{0.014}{s^2 + 0.028 + 0.014}$$

De esta forma:

$$X(s) = \frac{0.014}{s^2 + 0.028 + 0.014} R(s) = \frac{0.014}{s^2 + 0.028 + 0.014} \cdot \frac{1}{s}$$

Para calcular los parámetros solicitados debe resolverse la ecuación diferencial para obtener $x(t)$. El tiempo de peak se obtiene en t_p cuando ocurre: $dx/dt = 0$. Luego el monto de sobreoscilación se obtiene como $x(t_p) - 1$.

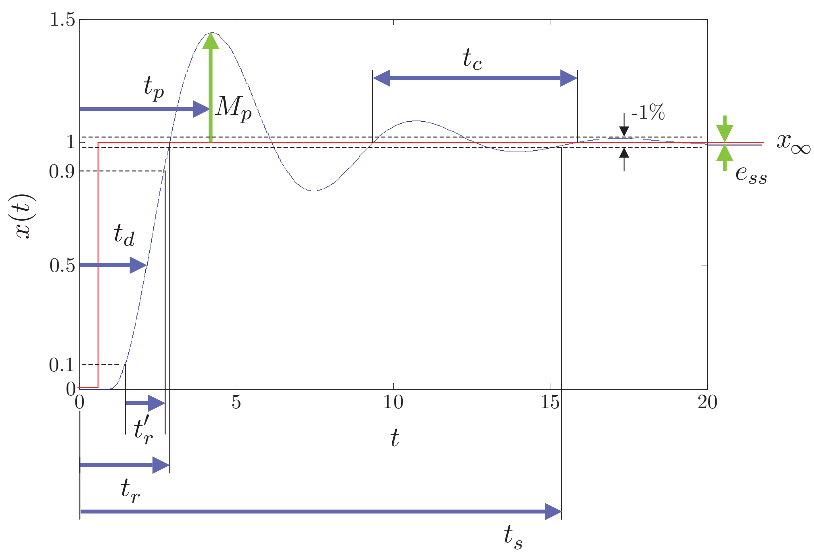

Figura 3: Especificaciones en el dominio del tiempo.

Una alternativa mas sencilla es recordar las clases, donde esto ya fue resuelto para el caso general de un sistema de segundo orden subamortiguado ($\xi < 1$) dado por:

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Si se recuerda de la materia vista en clases:

$$t_p = \frac{\pi}{\beta}$$

donde $\beta = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$. Y el overshoot se calcula como:

$$M_p = e^{-\pi/\gamma}$$

donde $\gamma = \dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$.

De esta forma si se observa nuestro sistema de segundo orden y se compara con el caso general se tiene:

$$\omega_n = \sqrt{0.014} = 0.1183 \qquad \wedge \qquad \xi = \frac{0.028}{2\omega_n} = 0.1183 < 1$$

Luego:

$$t_p = \frac{\pi}{\beta} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 26.7391 \text{ [s]}$$

y

$$M_p = e^{-\pi/\gamma} = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} = 0.687738 = 68.7738\,\%$$

Problema 5

Para el sistema realimentado de la Figura 4, determine los valores de K_p, K_0, K_1 y K_2 (positivos) que generan un error permanente de control nulo, ante un escalón en la referencia. Verifique la estabilidad.

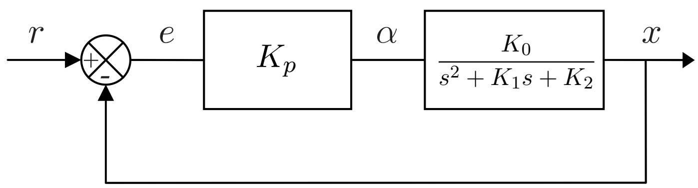

Figura 4: Diagrama del sistema.

Solución:

Sea $G(s)=\frac{K_0}{s^2+K_1s+K_2}$, del problema anterior se sabe que:

$$X(s)=R(s)\frac{K_pG(s)}{1+K_pG(s)} \qquad \wedge \qquad E(s)=\frac{R(s)}{1+K_pG(s)}$$

Como $R(s)=1/s$ y utilizando el Teorema del Valor Final:

$$\lim_{t\to\infty} e(t)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\frac{s^2+K_1s+K_2}{s^2+K_1s+K_2+K_0K_p}=0$$

De lo anterior es claro que si $K_2=0$ se cumple lo pedido.

Para verificar estabilidad se calculan los polos. Para ello se hace:

$$s^2+K_1s+K_2+K_0K_p=s^2+K_1s+K_0K_p=0$$

Resolviendo se tiene:

$$s_{1,2}=\frac{-K_1}{2}\pm\sqrt{\frac{K_1^2-4K_0K_p}{4}}$$

Para que el sistema sea estable se debe cumplir que la parte real sea negativa. De esta forma se exige:

$$\frac{-K_1}{2}\pm\sqrt{\frac{K_1^2-4K_0K_p}{4}}<0$$

Si $K_1^2-4K_0K_p<0$ el sistema siempre será estable (ya que $K_1>0$) y adentro de la raíz será un número imaginario. En el caso de que $K_1^2-4K_0K_p>0$ se debe exigir que:

$$-K_1+\sqrt{K_1^2-4K_0K_p}<0 \;\rightarrow\; K_1^2-4K_0K_p<K_1^2 \;\rightarrow\; 4K_0K_p>0$$

De esta forma el sistema será estable sin error permanente si:

$$K_p>0,\;K_0>0,\;K_1>0,\;K_2=0$$