

## Ayudantía 7

### Teorema de Rolle y del valor medio Máximos - Mínimos

**Problema 1.** Sea  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  derivable con  $f'(x) \neq 1$ . Pruebe que existe un único punto  $x_0 \in [0, 1]$  tal que  $f(x_0) = x_0$ .

**Solución:** Antes recordemos el Teorema del valor medio:

**Teorema del Valor Medio.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y diferenciable en  $(a, b)$ , entonces existe  $c$  en  $(a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ahora la solución del problema.

Dado que  $f$  es derivable y por lo tanto continua en  $[0, 1]$  se puede usar TVI para probar que existe a lo menos un  $x_0$  en  $[0, 1]$  tal que  $f(x_0) = x_0$  (para esto notar que  $f(0) \geq 0$ ,  $f(1) \leq 1$  y trabajar sobre  $g(x) = f(x) - x$ ). Faltaría probar que ese  $x_0$  es único. Para esto supongamos que también existe  $x_1$  en  $[0, 1]$  distinto de  $x_0$  que cumple que  $f(x_1) = x_1$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer  $x_1 > x_0$ . Como  $f$  es derivable en  $[x_0, x_1]$  podemos aplicar el Teorema del Valor medio en dicho intervalo. Por lo tanto existe un  $c$  en  $(x_0, x_1)$  tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} = 1$$

pero esto no puede ser pues  $f'(x) \neq 1$  para todo  $x$  en  $[0, 1]$ , esto significa que si suponemos que  $x_0$  no es único, llegamos a una contradicción. □

**Problema 2.** Demuestre usando el Teorema del valor medio que

$$\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$$

para todo  $x > -1$ .

**Solución:** Razonemos sobre 3 casos:

- $x \in (-1, 0)$

Como  $f(t) = \ln(1+t)$  es continua en  $[x, 0]$  y diferenciable en  $(x, 0)$  aplicamos el TVM y obtenemos que existe  $c_1$  en  $(x, 0)$  tal que

$$f'(c_1) = \frac{f(0) - f(x)}{0 - x}$$

es decir,

$$\frac{1}{1+c_1} = \frac{0 - \ln(1+x)}{-x} = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Recordemos que  $-1 < x < c_1 < 0$ , entonces tendremos que

$$1 < \frac{1}{1+c_1} < \frac{1}{1+x}.$$

De  $1 < \frac{1}{1+c_1}$  se sigue que  $\frac{\ln(x+1)}{x} > 1$  y si multiplicamos por  $x < 0$  esta expresión obtenemos

$$\ln(1+x) < x. \quad (2.1)$$

De  $\frac{1}{1+c_1} < \frac{1}{1+x}$  obtenemos que  $\frac{\ln(1+x)}{x} < \frac{1}{1+x}$  nuevamente multiplicamos por  $x < 0$  y obtenemos

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x). \quad (2.2)$$

De (2.1) y de (2.2) concluimos que

$$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$$

■  $x = 0$

En este caso la igualdad es trivial

$$\frac{x}{x+1} = \ln(1+x) = x = 0$$

■  $x > 0$

Como  $f(t) = \ln(1+t)$  es continua en  $[0, x]$  y diferenciable en  $(0, x)$  aplicamos el TVM y obtenemos que existe  $c_2$  en  $(0, x)$  tal que

$$f'(c_2) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

es decir,

$$\frac{1}{1+c_2} = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Recordemos que  $0 < c_2 < x$ , entonces tendremos que

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c_2} < 1.$$

De  $\frac{1}{1+c_2} < 1$  se sigue que  $\frac{\ln(x+1)}{x} < 1$  y si multiplicamos por  $x > 0$  esta expresión obtenemos

$$\ln(1+x) < x. \quad (2.3)$$

De  $\frac{1}{1+c_1} > \frac{1}{1+x}$  obtenemos que  $\frac{\ln(1+x)}{x} > \frac{1}{1+x}$  nuevamente multiplicamos por  $x > 0$  y obtenemos

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x). \quad (2.4)$$

De (2.3) y (2.4) concluimos finalmente que

$$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$$

□

**Problema 3.** Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$ , derivable en  $(a, b)$  y tal que  $f(a) = f(b) = 0$ . Demuestre que, dado cualquier número real  $k$  existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = kf(c)$ .

**Hint:** Trabaje con la función  $g(x) = f(x)e^{-kx}$ .

**Solución:** Antes de empezar recordemos el Teorema de Rolle.

**Teorema de Rolle.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y diferenciable en  $(a, b)$ , tal que  $f(a) = f(b)$ . Entonces existe un número  $c \in (a, b)$ , tal que

$$f'(c) = 0.$$

Ahora la solución del problema.

Sea  $g(x) = f(x)e^{-kx}$ . Notar que ella satisface las mismas hipótesis que  $f$  en el intervalo  $[a, b]$ : es continua, derivable y además  $g(a) = g(b) = 0$ , por lo tanto podemos aplicar el teorema de Rolle. Entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$g'(c) = 0.$$

Y como  $g'(c) = f'(c)e^{-kc} - kf(c)e^{-kc} = e^{-kc}(f'(c) - kf(c))$  tenemos que

$$e^{-kc}(f'(c) - kf(c)) = 0.$$

Como la función exponencial nunca se anula obtenemos lo pedido. □

**Problema 4.** Demuestre las siguientes afirmaciones:

(a) Si  $0 < u < v < \frac{\pi}{2}$ , entonces:

$$\frac{u}{v} < \frac{\sin(u)}{\sin(v)}$$

(b) El teorema del hipódromo, es decir que si 2 funciones  $f, g$  tal que  $f(a) = g(a)$  y  $f'(x) > g'(x)$  para todo  $x > a$  entonces  $f(x) > g(x)$ .

(c) Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  satisface que  $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$ ,  $\forall x, y \in [a, b]$  con  $\alpha > 1$  y  $c \in \mathbb{R}$ , entonces  $f$  es constante.

**Solución:**

(a) Analicemos la función

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{t}, \quad t \in (0, \pi/2)$$

Tomemos dos puntos arbitrarios en el intervalo,  $x, y$ , tales que  $x > y$ . Así, por el T.V.M:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(z) = \frac{z \cos(z) - \sin(z)}{z^2}, \quad z \in (x, y)$$

Analicemos ahora la función auxiliar  $g(z) = z \cos(z) - \sin(z)$ . Notemos que:

$$g'(z) = -z \sin(z) < 0, \quad \forall z \in (0, \pi/2)$$

Por tanto,

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} < 0 \longrightarrow f(x) < f(y)$$

y la función es decreciente. Si tomamos los  $u, v$  pedidos tendremos que:

$$f(v) < f(u) \rightarrow \frac{\sin(v)}{v} < \frac{\sin(u)}{u} \rightarrow \frac{u}{v} < \frac{\sin(u)}{\sin(v)}$$

que es lo que se pedía demostrar.

□

(b) Considere la función  $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ , esta función en el intervalo  $(a, x)$  cumple por TVM:

$$\varphi'(c) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}$$

Dado que  $\varphi'(c) = f'(c) - g'(c) > 0$  y que  $\varphi(a) = f(a) - g(a) = 0$ , lo que lo anterior nos queda:

$$\frac{\varphi(x)}{x - a} > 0 \rightarrow f(x) - g(x) > 0 \rightarrow f(x) > g(x) \quad \forall x > a$$

□

(c) La definición de derivada nos dice que:

$$f'(y) = \lim_{x \rightarrow y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

Así, utilizando la desigualdad del enunciado,

$$\begin{aligned} |f'(y)| &= \left| \lim_{x \rightarrow y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = \lim_{x \rightarrow y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \lim_{x \rightarrow y} \frac{c|x - y|^\alpha}{|x - y|} \\ &= \lim_{x \rightarrow y} c|x - y|^{\alpha-1} = 0 \end{aligned}$$

El límite anterior es cero pues  $\alpha - 1 > 0$ . Por lo tanto,  $|f'(y)| \leq 0$  lo que implica que  $f'(y) = 0$  para todo  $y \in [a, b]$  si y solo si  $f$  es constante en  $[a, b]$ .

□

**Problema 5.** Sean  $f, g$  dos funciones continuas en  $[a, b]$  y derivables  $(a, b)$ , entonces:

- (a) Si  $f(a) = g(a)$  y  $f(b) = g(b)$ , entonces demuestre que existe un  $\psi \in (a, b)$  que cumple  $f'(\psi) = g'(\psi)$
- (b) Si además aparte de lo del inciso a) se cumple que  $f(c) = g(c)$  con  $c \in (a, b)$  entonces demuestre que existe un  $\varphi \in (a, b)$  que cumple  $f''(\varphi) = g''(\varphi)$ .

### Solución:

- (a) Basta considerar  $h = f - g$  que satisface las condiciones del teorema de Rolle y por lo tanto existe  $\psi$  que cumple  $h'(\psi) = 0 \rightarrow f'(\psi) = g'(\psi)$

□

- (b)  $h$  satisface el teorema de Rolle entre  $(a, c)$  y en  $(c, b)$  por lo que existen números  $\psi_1$  y  $\psi_2$  que cumplen:

$$h'(\psi_1) = h'(\psi_2) = 0$$

y aplicando nuevamente teorema de Rolle, tenemos que existe

$$h''(\varphi) = 0 \rightarrow f''(\varphi) = g''(\varphi)$$

con  $\varphi \in (\psi_1, \psi_2)$ .

□

**Problema 6.** Los siguientes problemas no tienen relación entre sí:

- (a) Sea  $f(x)$  una función continua en  $[0, 4]$ , derivable en  $(0, 4)$  y tal que  $f(0) = 0$ . Demuestre que si  $f'(x) \leq x$  entonces  $f(4) \leq 16$
- (b) Muestre que  $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- (c) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función impar y diferenciable. Demuestre que  $\forall a > 0$  existe  $c$  tal que  $f'(c) = \frac{f(a)}{a}$

**Solución:**

- (a) Usando TVM en  $(0, 4)$  tenemos:

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{f(4)}{4}$$

Dado que  $f'(c) \leq c$  y  $c \leq 4$  nos deja que:

$$\frac{f(4)}{4} \leq 4 \longrightarrow f(4) \leq 16$$

□

- (b) Usando TVM en la función  $f(x) = \sin x$  en el intervalo  $(y, x)$  (sin pérdida de generalidad asumimos  $x > y$ ) tenemos:

$$\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \cos \alpha \longrightarrow |\sin x - \sin y| = |\cos \alpha| |x - y| \leq |x - y|$$

pues  $|\cos \alpha|$  está acotado por 1.

□

- (c) Consideremos el TVM en el intervalo  $(-a, a)$ :

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)} = \frac{f(a) + f(a)}{2a} = \frac{f(a)}{a}$$

□

**Problema 7.** Una cuerda de largo  $L$  se corta en dos pedazos para formar una circunferencia y un cuadrado con cada pedazo respectivamente. Determine como debe hacerse el corte para que la suma de las áreas de la circunferencia y del cuadrado sea máxima.

**Solución:** Supongamos que el corte se hizo de tal manera que con un trozo de largo  $x$  formaremos la circunferencia y con el otro de largo  $L - x$  formaremos el cuadrado. Luego la función que debemos maximizar es

$$f(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(L - x)^2}{16} \quad x \in [0, L].$$

luego

$$f'(x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{L - x}{8} \quad f''(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8}$$

Se observa que la segunda derivada es positiva por lo que cualquier punto crítico será mínimo y no máximo como buscamos. Luego la solución se encuentra en los extremos. Con  $x = 0$  se obtiene un área igual a  $\frac{L^2}{16}$  mientras que con  $x = L$  se obtiene  $\frac{L^2}{4\pi}$ . Con la segunda opción se maximiza el área, es decir, utilizando toda la cuerda para armar una circunferencia.

□

**Problema 8.** Dado  $V_0 > 0$  encontrar las dimensiones del cilindro recto de menor área total (considerar las tapas) de volumen  $V_0$ .

**Solución:** Sean  $r$  y  $h$  el radio basal y la altura del cilindro respectivamente. Entonces se tiene la relación

$$V_0 = \pi r^2 h \quad (8.1)$$

mientras que la función a maximizar es

$$A = 2\pi r h + 2\pi r^2.$$

De (8.1) se obtiene una relación para  $h$  en función de  $r$ . Reemplazamos y obtenemos que

$$A(r) = \frac{2V_0}{r} + 2\pi r^2$$

luego tenemos que

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2V_0}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V_0}{r^2}$$

Igualando a 0 para obtener puntos críticos se obtiene  $r_0 = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$ . Notar que  $A'(r) < 0$  a la izquierda de  $r_0$  y  $A'(r) > 0$  a la derecha de  $r_0$ , por lo tanto  $r_0$  es un mínimo local (también es válido verificar que la segunda derivada en  $r_0$  sea positiva). Este mínimo es global pues  $r \in (0, \infty)$ .  $\square$

**Problema 9.** Expresar el número 8 como suma de dos números no negativos de manera que la suma del cuadrado del primero y el cubo del segundo sea lo más pequeña posible. Resuelva el mismo problema si esta suma ha de ser lo más grande posible.

**Solución:** Sean  $x, y$  los números, entonces se tiene que  $x + y = 8$ , buscamos minimizar  $x^2 + y^3$ . Reemplazando tenemos la función a minimizar (o maximizar):

$$f(y) = (8 - y)^2 + y^3 = y^3 + y^2 - 16y + 64$$

Derivando e igualando a 0 tenemos:

$$3y^2 + 2y - 16 = 0 \longrightarrow y_1 = -\frac{8}{3} \wedge y_2 = 2$$

Inmediatamente descartamos  $y_1$  y confirmamos  $y_2$  con la segunda derivada.

$$f''(y) = 6y + 2 \rightarrow f''(2) = 14$$

por lo tanto  $x = 6$  e  $y = 2$  minimiza la función objetivo. Para el máximo notamos que debe estar en los extremos la solución. Luego si  $y = 8$  y  $x = 0$  maximizamos la función objetivo.  $\square$