

## Ayudantía 10

Teorema del Valor Medio de Integrales  
Integración por partes - Cambio de variable

**Problema 1.** Sin calcular las integrales determine cual integral es mayor:

$$\int_0^1 x^2 \sin^2 x dx \quad ; \quad \int_0^1 x \sin x dx$$

**Solución: Recordatorio:** Recordemos que la integral conserva de las desigualdades, si  $f(x) \leq g(x)$  en un intervalo  $[a, b]$  entonces:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

**TVM de las integrales,** Si  $f$  continua sabemos que existe un  $c \in [a, b]$  tal que:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

a este valor  $f(c)$  se le denomina valor medio de la integral. Una aplicación importante es que si  $f(x_1)$ ,  $f(x_2)$  son los valores mínimos y máximos de  $f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  entonces tenemos:

$$f(x_1)(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq f(x_2)(b-a)$$

Para el problema es fácil notar que  $x \sin x$  es un valor entre 0 y 1 en el intervalo  $[0, 1]$ , y por lo tanto al cuadrado  $x^2 \sin^2 x$  será menor, y por lo tanto:

$$\int_0^1 x^2 \sin^2 x dx \leq \int_0^1 x \sin x dx$$

□

**Problema 2.** Demuestre que si  $\int_a^b f(x) dx = 0$  con  $f$  continua, entonces existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$f(c) = 0$$

Usando el TVM de las integrales:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \cdot 0 = 0$$

□

**Problema 3.** Demuestre que  $2^{-q} \leq \int_0^1 \frac{dx}{(x^p + 1)^q} \leq 1$  con  $p, q \geq 0$

**Solución:** Notemos que el máximo y mínimo de la función (continua) se encuentran en  $x = 0$  y en  $x = 1$  respectivamente, luego usando una aplicación del TVM de las integrales tenemos:

$$\frac{1}{(1^p + 1)^q} \cdot (1 - 0) \leq \int_0^1 \frac{dx}{(x^p + 1)^q} \leq \frac{1}{(0 + 1)^q} \cdot (1 - 0)$$

y así:

$$2^{-q} \leq \int_0^1 \frac{dx}{(x^p + 1)^q} \leq 1$$

□

**Problema 4.** Calcule usando integración por partes:

(a)  $\int \ln x dx$

**Solución:** Ponemos  $u = \ln x \rightarrow du = \frac{dx}{x}$  y  $dv = dx \rightarrow v = x$  con lo que nos queda:

$$\int \ln x dx = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln x - x = x(\ln x - 1) + C$$

□

(b)  $\int \arcsin x dx$

**Solución:** Pongamos  $u = \arcsin x \rightarrow du = dx/\sqrt{1-x^2}$  y  $dv = dx \rightarrow v = x$ . Luego

$$I = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Luego hacemos un cambio de variable para la segunda integral:

$$z = 1 - x^2 \rightarrow dz = -2x dx \rightarrow \frac{dz}{-2} = x dx$$

y nos queda:

$$I = x \arcsin x - \int \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot \frac{dz}{-2} = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int z^{-1/2} dz$$

Resolviendo y devolviendo el cambio:

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

□

(c)  $\int e^{ax} \cos(bx) dx$

**Solución:** Sea  $I = \int e^{ax} \cos(bx) dx$  si hacemos integración por partes con

$$u = e^{ax} \quad \wedge \quad dv = \cos(bx) dx$$

y así:

$$du = ae^{ax} dx \quad \wedge \quad v = \frac{1}{b} \sin(bx)$$

por lo que nos queda:

$$I = e^{ax} \cdot \frac{1}{b} \sin(bx) - \int \frac{1}{b} \sin(bx) ae^{ax} dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin(bx) - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin(bx) dx$$

Ahora si hacemos nuevamente integración por partes en la segunda integral con

$$u = e^{ax} \quad \wedge \quad dv = \sin(bx) dx$$

y así:

$$du = ae^{ax} dx \quad \wedge \quad v = -\frac{1}{b} \cos(bx)$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{b} e^{ax} \sin(bx) - \frac{a}{b} \left( -e^{ax} \cdot \frac{1}{b} \cos(bx) + \int \frac{1}{b} \cos(bx) ae^{ax} dx \right) \\ &= \frac{1}{b} e^{ax} \sin(bx) + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos(bx) - \frac{a^2}{b^2} \underbrace{\int e^{ax} \cos(bx) dx}_I \end{aligned}$$

Agrupando términos tenemos:

$$I \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right) = I \left( \frac{a^2 + b^2}{b^2} \right) = \frac{1}{b} e^{ax} \sin(bx) + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos(bx)$$

Y por lo tanto:

$$\begin{aligned} I &= \frac{b^2}{a^2 + b^2} \left( \frac{1}{b} e^{ax} \sin(bx) + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos(bx) \right) + C \\ &= e^{ax} \left( \frac{b \sin(bx) + a \cos(bx)}{a^2 + b^2} \right) + C \end{aligned}$$

□

(d)  $\int \cos(\sqrt{x}) dx$

**Solución:** Modifiquemos el integrando mediante la siguiente sustitución:

Sea  $m = \sqrt{x}$  y con ello  $dm = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ . Así,

$$\int \cos(\sqrt{x}) dx = 2 \int \sqrt{x} \cos(\sqrt{x}) \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2 \int m \cos(m) dm$$

Por tanto, aplicamos ahora el método de integración por partes.

$$\begin{array}{ll} u &= m \\ \Rightarrow du &= dm \end{array} \qquad \begin{array}{ll} dv &= \cos(m) \\ \Rightarrow v &= \sin(m) \end{array}$$

Así,

$$\begin{aligned} m \sin(m) &= \int m \cos(m) dm + \int \sin(m) dm \\ \therefore \int m \cos(m) dm &= m \sin(m) + \cos(m) + k \end{aligned}$$

Reemplazando,

$$\int \cos(\sqrt{x}) dx = 2(m \sin(m) + \cos(m) + k) = 2\sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) + 2 \cos(\sqrt{x}) + c$$

□

**Problema 5.** Use técnicas apropiadas para calcular las integrales:

(a) Calcule  $\int_0^4 \frac{|x-1|}{|x-2|+|x-3|} dx$ .

**Solución:** Se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{|x-1|}{|x-2|+|x-3|} dx &= \int_0^1 \frac{x-1}{2x-5} dx + \int_1^2 \frac{x-1}{-2x+5} dx \\ &\quad + \int_2^3 (x-1) dx + \int_3^4 \frac{x-1}{2x-5} dx \\ &= 2 + \frac{9}{4} \log(3) - \frac{3}{4} \log(5). \end{aligned}$$

□

(b) Hallar  $\int \frac{\sin(3 \ln(x))}{x} dx$ .

**Solución:** Conviene hacer la sustitución  $u = \ln(x)$  pues su derivada  $\frac{1}{x}$  aparece en la integral. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(3 \ln(x))}{x} dx &= \int \sin(3u) du \\ &= \frac{1}{3} \int 3 \sin(3u) du \\ &= -\frac{\cos(u)}{3} + C \\ &= -\frac{\cos(\ln(x))}{3} + C. \end{aligned}$$

Nota: se usó que  $\int 3 \sin(3u) du = -\cos(3u)$ . Esto puede verificarse haciendo una simple sustitución  $a = 3u$ . □

(c) Calcule  $\int_0^8 2x\sqrt{1+x^2} dx$ .

**Solución:** Se tiene una función aplicada sobre  $x^2 + 1$  y además aparece su derivada ( $2x$ ) en la integral. Por lo tanto se realiza la sustitución

$$u = 1 + x^2,$$

así

$$du = 2x dx$$

y el intervalo de integración queda  $x = 0 \Rightarrow u = 1$ ,  $x = 8 \Rightarrow u = 65$ , luego:

$$\begin{aligned} \int_0^8 2x\sqrt{1+x^2} dx &= \int_1^{65} \sqrt{u} du \\ &= \int_1^{65} u^{1/2} du \\ &= \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_1^{65} \\ &= \frac{2}{3} (\sqrt{65^3} - 1) \end{aligned}$$

□

(d) Sea  $f$  continua tal que  $\int_0^2 f(x) dx = 4$  y  $\int_0^5 f(x) dx = 7$ . Determine

$$\int_0^1 f(2+3x) dx.$$

**Solución:** Realizar la sustitución  $u = 2 + 3x$ ,  $du = 3 dx$ . Así se tiene que cuando  $x$  varía entre 0 y 1,  $u$  varía entre 2 y 5, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(2+3x) dx &= \int_2^5 \frac{f(u)}{3} du \\ &= \frac{1}{3} \left[ \int_0^5 f(u) du - \int_0^2 f(u) du \right] \\ &= \frac{7-4}{3} = 1 \end{aligned}$$

□

(e) Encuentre  $\int \cos^2(x) dx$ .

**Solución:** En integrales que involucren productos de senos y cosenos es común utilizar alguna de las siguientes identidades trigonométricas:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1, \quad \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \quad \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x), \quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

La identidad a usar dependerá de cada caso.

En este caso se tiene

$$\begin{aligned} \int \cos^2(x) dx &= \int \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int 1 dx + \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx \\ &= \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C. \end{aligned}$$

□

(f) Encuentre  $\int \sin^3(x) \cos(2x) dx$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} \int \sin^3(x) \cos(2x) dx &= \int \sin^3(x) (\cos^2(x) - \sin^2(x)) dx \\ &= \int [\sin^3 \cos^2(x) - \sin^5(x)] dx \\ &= \int [\sin(x)(1 - \cos^2(x)) \cos^2(x) - \sin(x)(1 - \cos^2(x))^2] dx \\ &= \int [(1 - \cos^2(x)) \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x))^2] \sin(x) dx \end{aligned}$$

Sea  $u = \cos(x)$ , entonces  $du = -\sin(x) dx$ . Luego

$$\begin{aligned} \int \sin^3(x) \cos(2x) dx &= - \int [(1 - u^2)u^2 - (1 - u^2)^2] du \\ &= - \int [2u^4 - 3u^2 + 1] du \\ &= -\frac{2}{5}u^5 + u^3 - u + C \\ &= -\frac{2}{5}\cos^5(x) + \cos^3(x) - \cos(x) + C. \end{aligned}$$

□

(g) Encontrar  $\int \cos^{2/3}(x) \sin^5(x) dx$ .

**Solución:** La idea en este ejercicio es la misma. Notar que  $\sin^4(x) = (\sin^2(x))^2 = (1 - \cos^2(x))^2$ . Luego hacer  $u = \cos(x)$ ,  $du = -\sin(x) dx$ .

$$\begin{aligned}
 \int \cos^{2/3}(x) \sin^5(x) dx &= \int \cos^{2/3}(x) (1 - \cos^2(x))^2 \sin(x) dx \\
 &= \int -u^{2/3} \cdot (1 - u^2)^2 du \\
 &= - \int \left[ u^{2/3} - 2u^{8/3} + u^{14/3} \right] du \\
 &= -\frac{3}{5} u^{5/3} + \frac{3}{5} u^{10/3} - \frac{3}{17} u^{17/3} + C \\
 &= -\frac{3}{5} \cos^{5/3}(x) + \frac{3}{5} \cos^{10/3}(x) - \frac{3}{17} \cos^{17/3}(x) + C
 \end{aligned}$$

□

**Propuesto 1.** Suponga que  $f$  es continua en  $[0, 1]$ . Muestre que

$$\int_0^\pi x f(\sin(x)) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin(x)) dx.$$

Luego use este resultado para calcular

$$\int_0^\pi \frac{x \sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Indicación:** Use apropiadamente alguna (o ambas) de las sustituciones  $t = \pi - x$  y  $u = \pi/2 - x$ .