

Ayudantía 6

Técnicas especiales para derivar - Interpretación geométrica de la derivada
Tasa de Cambio

Problema 1. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = (x^2 \cot^4 2x + 1)^{\ln(x^4+1)}$

(b) $f(x) = \frac{x^{2/5} \sqrt{x^3+4}}{(3x^2+2)^4}$

Solución:

- (a) La técnica general para derivar funciones del tipo $f(x) = g(x)^{h(x)}$ es tomar logaritmo. Así tenemos que:

$$\begin{aligned}\ln(f(x)) &= \ln\left((x^2 \cot^4 2x + 1)^{\ln(x^4+1)}\right) \\ &= \ln(x^4 + 1) \cdot \ln(x^2 \cot^4(2x) + 1)\end{aligned}$$

Ahora derivamos:

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)} &= (\ln(x^4 + 1))' \cdot (\ln(x^2 \cot^4(2x) + 1)) + (\ln(x^4 + 1)) \cdot (\ln(x^2 \cot^4(2x) + 1))' \\ &= \frac{4x^3}{x^4 + 1} \cdot \ln(x^2 \cot^4(2x) + 1) + \ln(x^4 + 1) \cdot \frac{2x \cot^4(2x) - 8x^2 \cot^3(2x) \csc^2(2x)}{x^2 \cot^4(2x) + 1}\end{aligned}$$

$$\therefore f'(x) = f(x) \left(\frac{4x^3}{x^4 + 1} \cdot \ln(x^2 \cot^4(2x) + 1) + \ln(x^4 + 1) \cdot \frac{2x \cot^4(2x) - 8x^2 \cot^3(2x) \csc^2(2x)}{x^2 \cot^4(2x) + 1} \right) \square$$

- (b) Tomar logaritmo también útil cuando hay que derivar funciones con muchos productos de potencias. En este caso tenemos:

$$\begin{aligned}\ln(f(x)) &= \ln\left(\frac{x^{2/5} \sqrt{x^3+4}}{(3x^2+2)^4}\right) \\ &= \frac{2}{5} \ln(x) + \frac{1}{2} \ln(x^3 + 4) - 4 \ln(3x^2 + 2)\end{aligned}$$

Luego derivamos

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{5x} + \frac{3x^2}{2(x^3+4)} - \frac{24x}{3x^2+2}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{x^{2/5} \sqrt{x^3+4}}{(3x^2+2)^4} \left(\frac{2}{5x} + \frac{3x^2}{2(x^3+4)} - \frac{24x}{3x^2+2} \right) \square$$

Problema 2. Dada la función $f(x) = \sin(x) + x$, encuentre $(f^{-1})'(0)$.

Solución: Para una función en general, la regla de la cadena nos permite encontrar la derivada de su inversa de la siguiente manera:

Tenemos que

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

derivamos respecto a x

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$$

despejando obtenemos

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Ahora resolvamos el ejercicio.

Como nos piden $(f^{-1})'(0)$ debemos encontrar $\frac{1}{f'(x)}$ y evaluar en el punto $x = f^{-1}(0)$.

Por una parte, derivando la función obtenemos que

$$f'(x) = \cos(x) + 1,$$

así que

$$\frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos(x) + 1}.$$

Y por otro lado, si $x = f^{-1}(0)$, entonces $f(x) = 0$, es decir, $\sin(x) + x = 0$. La solución a esta ecuación es trivial y obtenemos que $x = 0$. Por lo tanto:

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$$

□

Problema 3. Calcule la derivada de

(a) $f(x) = \arcsin(x)$.

(b) $f(x) = \arctan(x)$.

Solución:

(a) Notamos que

$$\sin(\arcsin(x)) = x$$

y derivando obtenemos

$$\cos(\arcsin(x)) \cdot (\arcsin(x))' = 1$$

luego

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

□

(b) Notamos que

$$\tan(\arctan(x)) = x$$

y derivando obtenemos

$$\sec^2(\arctan(x)) \cdot (\arctan(x))' = 1$$

luego

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{\sec^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$

□

Problema 4. Se define y como función implícita de x mediante la siguiente ecuación:

$$x^3 - 2xy + y^3 = 0.$$

Note que esta ecuación define una curva en \mathbb{R}^2 . Pruebe que la recta normal al gráfico de la curva en el punto $(1, 1)$ también pasa por el punto $(2, 2)$.

Solución: Primero buscamos la ecuación de la recta normal al gráfico en el punto $(1, 1)$ y luego verificaremos que $(2, 2)$ satisface dicha ecuación.

Sobre la recta normal sabemos que pasa por $(1, 1)$ y derivando es posible obtener la pendiente de la tangente al gráfico en dicho punto. Así, la pendiente de la recta tangente en un punto (x, y) será $\frac{dy}{dx}$. Tomamos la ecuación

$$x^3 - 2xy + y^3 = 0$$

y derivamos implícitamente respecto a la variable x .

$$3x^2 - 2xy' - 2y + 3y^2y' = 0$$

despejando obtenemos

$$y' = \frac{2y - 3x^2}{3y^2 - 2x}.$$

Para el punto $(1, 1)$ la pendiente de la tangente será $m_1 = \frac{2 - 3}{3 - 2} = -1$. Pero nosotros buscamos la pendiente de la recta normal, así que usamos el hecho de que el producto entre las pendientes de la normal y la tangente es -1 (pues son rectas perpendiculares) y obtenemos que la pendiente de la recta normal en $(1, 1)$ es $m_2 = 1$.

Con un punto y la pendiente se puede encontrar la ecuación de la recta que será

$$y = x,$$

y es claro que esta recta pasa por el punto $(2, 2)$. □

Problema 5. Considerar la elipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

y un punto (x_0, y_0) que pertenece a ella. Demostrar que la ecuación de la recta tangente a la elipse en (x_0, y_0) es $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$.

Solución: Tomamos la ecuación de la elipse y derivando implícitamente obtenemos

$$2b^2x + 2a^2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Por lo tanto en (x_0, y_0) la pendiente de la recta tangente es $m = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$. Luego la ecuación de la recta tangente es

$$y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0).$$

Ahora usamos el hecho de que (x_0, y_0) pertenece a la elipse, y por lo tanto satisface su ecuación, para reducir la expresión anterior a

$$b^2x_0x + a^2y_0y = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$$

□

Problema 6. Sea y una función implícita de x definida por:

$$x^2 + xy + y^2 = 1$$

Determine todas las rectas tangentes a la gráfica de la curva que pasan por el punto $(-1, 2)$.

Solución: Derivando implícitamente en (x_0, y_0) tenemos:

$$y'(x_0) = -\frac{2x_0 + y_0}{2y_0 + x_0} = m$$

Como buscamos rectas tangentes a la elipse queremos rectas de la forma:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad (6.1)$$

Como queremos que pase por el punto $(-1, 2)$ tenemos:

$$2 - y_0 = m(-1 - x_0) \rightarrow 2 - y_0 = -\frac{2x_0 + y_0}{2y_0 + x_0}(-1 - x_0) \rightarrow 3y_0 = 2(x_0^2 + x_0y_0 + y_0^2) \rightarrow y_0 = \frac{2}{3}$$

Que reemplazando en la ecuación de la curva, tenemos que:

$$x_0 = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

y al reemplazar en (6.1) se obtienen las 2 rectas tangentes.

□

Problema 7. Determinar un valor de $k \in \mathbb{R}$ de modo que los gráficos de las funciones $f(x) = kx^3$ y $g(x) = \ln x$ se intersecten en un punto donde las rectas tangentes a ambos gráficos coincidan.

Solución: Las rectas tangentes en c a f y g están dadas por:

$$y = f'(c)(x - c) + f(c) \quad ; \quad y = g'(c)(x - c) + g(c)$$

Por otro lado para que las rectas coincidan deben tener la misma pendiente, lo que implica:

$$f'(c) = g'(c) \rightarrow 3kc^2 = \frac{1}{c} \rightarrow 3kc^3 = 1 \quad (7.1)$$

Además se necesitan que las gráficas se intersecten en $x = c$, lo que implica

$$f(c) = g(c) \rightarrow kc^3 = \ln(c) \quad (7.2)$$

Reemplazando (7.1) en (7.2) se tiene:

$$\frac{1}{3} = \ln c \rightarrow c = e^{1/3} \quad (7.3)$$

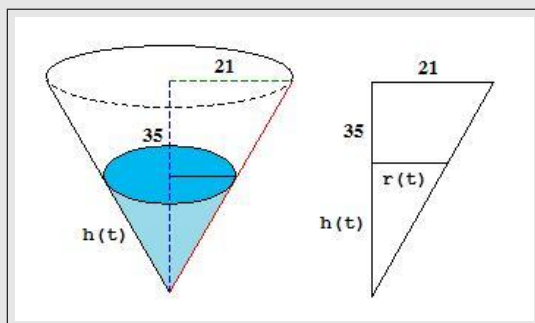
Reemplazando (7.3) en (7.1) se tiene

$$k = \frac{1}{3e}$$

□

Problema 8. En un depósito cónico recto entra, a razón de $8 \left[\frac{L}{s}\right]$ cierto líquido incompresible. El radio y la altura del depósito son $21 [m]$ y $35 [m]$ respectivamente. Calcule la tasa de crecimiento de la altura cuando ésta toma un valor de $h = 6 [m]$.

Solución: Realizando un diagrama de la situación, tenemos que:



Notemos que, por el Teorema de Tales, encontramos la siguiente relación:

$$\frac{r(t)}{h(t)} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5} \Rightarrow r(t) = \frac{3}{5} h(t)$$

Ahora bien, el volumen del líquido contenido en el depósito corresponde a

$$V(t) = \frac{1}{3} \pi r(t)^2 h(t)$$

Así, con la relación antes calculada, tenemos que:

$$V(t) = \frac{1}{3} \pi \frac{9}{25} h(t)^3$$

Con ello, la variación temporal de la expresión queda como sigue:

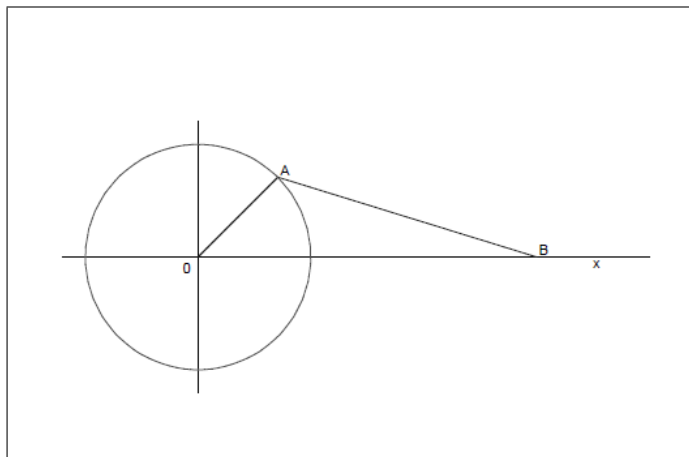
$$\frac{dV}{dt} = \frac{9\pi}{25} h(t)^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{25 \frac{dV}{dt}}{9\pi h(t)^2}$$

Reemplazando,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{25 \cdot 8}{9\pi \cdot 6^2} = \frac{50}{81\pi} \approx 0,196 \left[\frac{m}{s} \right]$$

□

Problema 9. Sobre un círculo de radio 1 se mueve el extremo A de una barra de largo 3 cuyo otro extremo B se desliza sobre un eje fijo.



- Determine una ecuación que relacione la posición x del punto B con el ángulo $\angle BOA = \theta$.
- Suponga que A gira en el sentido contrario a las manecillas del reloj con el ángulo θ variando a una tasa de $0,6 \text{ [rad/s]}$. Calcule la velocidad de desplazamiento de B cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Solución:

(a) Sea x la posición del punto B . Por el *Teorema del Coseno* tenemos que:

$$9 = 1 + x^2 - 2x \cos(\theta)$$

(b) Derivando la ecuación anterior con respecto al tiempo tenemos:

$$2x \frac{dx}{dt} - 2 \frac{dx}{dt} \cos(\theta) + 2x \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{x \sin(\theta)}{\cos(\theta) - x} \frac{d\theta}{dt}$$

Cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$ obtenemos x de la ecuación original, después de descartar la raíz negativa. Esto da que $x = \sqrt{2} + \sqrt{17/2}$, que sumado al hecho que

$$\frac{d\theta}{dt} = 0,6$$

da el resultado reemplazando:

$$\frac{dx}{dt} \approx -0,5071 \text{ [m/s]}$$

□