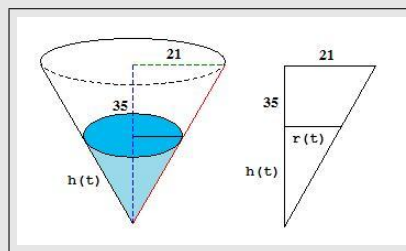


Ayudantía Extra

Técnicas especiales para derivar - Interpretación geométrica de la derivada
Teoremas de Rolle y del valor medio - Tasa de Cambio

Problema 1. En un depósito cónico recto entra, a razón de $8 \left[\frac{L}{s}\right]$ cierto líquido incompresible. El radio y la altura del depósito son $21 [m]$ y $35 [m]$ respectivamente. Calcule la tasa de crecimiento de la altura cuando ésta toma un valor de $h = 6 [m]$.

Solución: Realizando un diagrama de la situación, tenemos que:



Notemos que, por el Teorema de Tales, encontramos la siguiente relación:

$$\frac{r(t)}{h(t)} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5} \Rightarrow r(t) = \frac{3}{5} h(t)$$

Ahora bien, el volumen del líquido contenido en el depósito corresponde a

$$V(t) = \frac{1}{3} \pi r(t)^2 h(t)$$

Así, con la relación antes calculada, tenemos que:

$$V(t) = \frac{1}{3} \pi \frac{9}{25} h(t)^3$$

Con ello, la variación temporal de la expresión queda como sigue:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{9\pi}{25} h(t)^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{25 \frac{dV}{dt}}{9\pi h(t)^2}$$

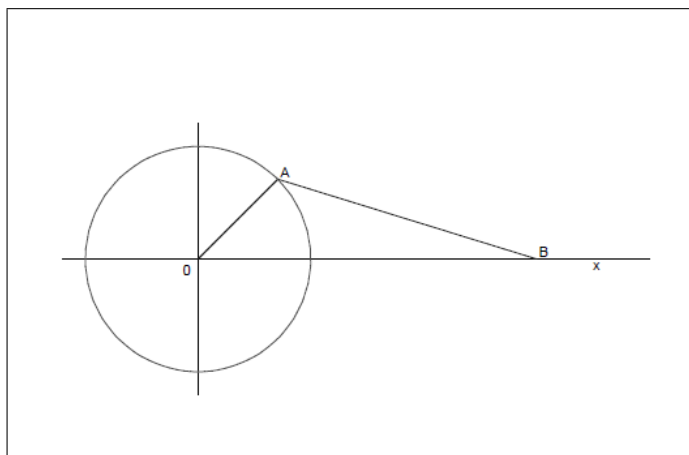
Reemplazando,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{25 \cdot 8}{9\pi \cdot 6^2} = \frac{50}{81\pi} \approx 0,196 \left[\frac{m}{s} \right]$$

□

Problema 2. Sobre un círculo de radio 1 se mueve el extremo A de una barra de largo 3 cuyo otro extremo

B se desliza sobre un eje fijo.



- (a) Determine una ecuación que relacione la posición x del punto B con el ángulo $\angle BOA = \theta$.
- (b) Suponga que A gira en el sentido contrario a las manecillas del reloj con el ángulo θ variando a una tasa de $0,6 \text{ [rad/s]}$. Calcule la velocidad de desplazamiento de B cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Solución:

- (a) Sea x la posición del punto B . Por el *Teorema del Coseno* tenemos que:

$$9 = 1 + x^2 - 2x \cos(\theta)$$

- (b) Derivando la ecuación anterior con respecto al tiempo tenemos:

$$2x \frac{dx}{dt} - 2 \frac{dx}{dt} \cos(\theta) + 2x \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{x \sin(\theta)}{\cos(\theta) - x} \frac{d\theta}{dt}$$

Cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$ obtenemos x de la ecuación original, después de descartar la raíz negativa. Esto da que $x = \sqrt{2} + \sqrt{17/2}$, que sumado al hecho que

$$\frac{d\theta}{dt} = 0,6$$

da el resultado reemplazando:

$$\frac{dx}{dt} \approx -0,5071 \text{ [m/s]}$$

□

Problema 3. Demuestre las siguientes afirmaciones:

- (a) Si $0 < u < v < \frac{\pi}{2}$, entonces:

$$\frac{u}{v} < \frac{\sin(u)}{\sin(v)}$$

- (b) El teorema del hipódromo, es decir que si 2 funciones f, g tal que $f(a) = g(a)$ y $f'(x) > g'(x)$ para todo $x > a$ entonces $f(x) > g(x)$.
- (c) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ satisface que $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$, $\forall x, y \in [a, b]$ con $\alpha > 1$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces f es constante.

Solución:

(a) Analicemos la función

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{t}, \quad t \in (0, \pi/2)$$

Tomemos dos puntos arbitrarios en el intervalo, x, y , tales que $x > y$. Así, por el T.V.M:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(z) = \frac{z \cos(z) - \sin(z)}{z^2}, \quad z \in (x, y)$$

Analicemos ahora la función auxiliar $g(z) = z \cos(z) - \sin(z)$. Notemos que:

$$g'(z) = -z \sin(z) < 0, \quad \forall z \in (0, \pi/2)$$

Por tanto,

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} < 0 \longrightarrow f(x) < f(y)$$

y la función es decreciente. Si tomamos los u, v pedidos tendremos que:

$$f(v) < f(u) \rightarrow \frac{\sin(v)}{v} < \frac{\sin(u)}{u} \rightarrow \frac{u}{v} < \frac{\sin(u)}{\sin(v)}$$

que es lo que se pedía demostrar. □

(b) Considere la función $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, esta función en el intervalo (a, x) cumple por TVM:

$$\varphi'(c) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}$$

Dado que $\varphi'(c) = f'(c) - g'(c) > 0$ y que $\varphi(a) = f(a) - g(a) = 0$, lo que lo anterior nos queda:

$$\frac{\varphi(x)}{x - a} > 0 \rightarrow f(x) - g(x) > 0 \rightarrow f(x) > g(x) \quad \forall x > a$$
□

(c) La definición de derivada nos dice que:

$$f'(y) = \lim_{x \rightarrow y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

Así, utilizando la desigualdad del enunciado,

$$\begin{aligned} |f'(y)| &= \left| \lim_{x \rightarrow y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = \lim_{x \rightarrow y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \lim_{x \rightarrow y} \frac{c|x - y|^\alpha}{|x - y|} \\ &= \lim_{x \rightarrow y} c|x - y|^{\alpha-1} = 0 \end{aligned}$$

El límite anterior es cero pues $\alpha - 1 > 0$. Por lo tanto, $|f'(y)| \leq 0$ lo que implica que $f'(y) = 0$ para todo $y \in [a, b]$ si y solo si f es constante en $[a, b]$. □

Problema 4. Sean f, g dos funciones continuas en $[a, b]$ y derivables (a, b) , entonces:

- (a) Si $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$, entonces demuestre que existe un $\psi \in (a, b)$ que cumple $f'(\psi) = g'(\psi)$
- (b) Si además aparte de lo del inciso a) se cumple que $f(c) = g(c)$ con $c \in (a, b)$ entonces demuestre que existe un $\varphi \in (a, b)$ que cumple $f''(\varphi) = g''(\varphi)$.

Solución:

- (a) Basta considerar $h = f - g$ que satisface las condiciones del teorema de Rolle y por lo tanto existe ψ que cumple $h'(\psi) = 0 \rightarrow f'(\psi) = g'(\psi)$ □

- (b) h satisface el teorema de Rolle entre (a, c) y en (c, b) por lo que existen números ψ_1 y ψ_2 que cumplen:

$$h'(\psi_1) = h'(\psi_2) = 0$$

y aplicando nuevamente teorema de Rolle, tenemos que existe

$$h''(\varphi) = 0 \rightarrow f''(\varphi) = g''(\varphi)$$

con $\varphi \in (\psi_1, \psi_2)$. □

Problema 5. Los siguientes problemas no tienen relación entre sí:

- (a) Sea $f(x)$ una función continua en $[0, 4]$, derivable en $(0, 4)$ y tal que $f(0) = 0$. Demuestre que si $f'(x) \leq x$ entonces $f(4) \leq 16$
- (b) Muestre que $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- (c) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función impar y diferenciable. Demuestre que $\forall a > 0$ existe c tal que $f'(c) = \frac{f(a)}{a}$

Solución:

- (a) Usando TVM en $(0, 4)$ tenemos:

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{f(4)}{4}$$

Dado que $f'(c) \leq c$ y $c \leq 4$ nos deja que:

$$\frac{f(4)}{4} \leq 4 \longrightarrow f(4) \leq 16$$

□

- (b) Usando TVM en la función $f(x) = \sin x$ en el intervalo (y, x) (sin pérdida de generalidad asumimos $x > y$) tenemos:

$$\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \cos \alpha \longrightarrow |\sin x - \sin y| = |\cos \alpha| |x - y| \leq |x - y|$$

pues $|\cos \alpha|$ esta acotado por 1.

□

- (c) Consideremos el TVM en el intervalo $(-a, a)$:

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)} = \frac{f(a) + f(a)}{2a} = \frac{f(a)}{a}$$

□