

Ayudantía 9

Sumas Inferiores y Superiores - Teorema Fundamental del Cálculo

Problema 1. Demuestre que, si $f(x)$ es una función Riemann-Integrable en $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{(b-a)k}{n}\right)$$

y de aquí deduzca que:

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Solución: Recordemos la definición dada por Riemann para su integral:

Una función f acotada definida en un intervalo $[a, b]$ se dice que es Riemann integrable en $[a, b]$ si existe un número I en los reales tal que, para todo número real positivo ϵ existe una δ positiva tal que si \mathcal{P} es una partición de $[a, b]$ con $\|\mathcal{P}\| < \delta$ y $S(\mathcal{P}, f)$ es cualquier suma de Riemann entonces $|S(\mathcal{P}, f) - I| < \epsilon$.

Entonces, sea f una función que cumple con las características anteriores:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

Así, sea \mathcal{P} una partición de $[a, b]$ definida de la siguiente manera:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$x_{k-1} \leq c_k \leq x_k$$

Dado que la función es integrable para cualquier suma de Riemann, tomaremos una partición de n subintervalos de la misma longitud:

$$\Delta x_k = \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Elegiremos c_k como el punto terminal derecho de cada subintervalos. Así:

$$c_k = a + k(\Delta x) = a + \frac{(b-a)k}{n}$$

Dado que la función es integrable, es claro que:

$$|S(\mathcal{P}, f) - I| < \epsilon \implies \left| \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{(b-a)k}{n}\right) \frac{b-a}{n} \right| < \epsilon$$

Con ello, llevando refinando nuestra partición \mathcal{P} aumentando el número de subintervalos:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{(b-a)k}{n}\right)$$

Ahora bien, aplicando el resultado anterior tenemos que:

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

□

Problema 2. Sean $0 < a < b$ y

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Encuentre la integral de Riemann superior e inferior de la función f . ¿Es integrable?

Solución: Dada una partición P denotaremos por $s(P, f)$ y $S(P, f)$ las sumas inferior y superior asociadas a esa partición. Como los conjuntos \mathbb{Q} y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son densos en \mathbb{R} (es decir, en cualquier intervalo siempre hay racionales e irracionales) vemos que para cualquier partición P de $[a, b]$ se tiene $s(P, f) = 0$. En consecuencia

$$\int_a^b f dx = 0.$$

Por otro lado,

$$S(P, f) = \sum_{i=1}^n x_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i x_{i-1} \geq \frac{1}{2}(b^2 - a^2),$$

pues $2x_i x_{i-1} \leq x_i^2 + x_{i-1}^2$. Esto sugiere que

$$\overline{\int_a^b f dx} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

En efecto, tomamos la secuencia de particiones uniformes P_n con $x_i = a + (b-a)i/n, i = 0, 1, \dots, n$, vemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S(P_n, f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n a + (b-a)i/n \\ &= \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \end{aligned}$$

Se concluye que f no es integrable.

□

Problema 3. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Muestre que $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

Solución: Dado $\epsilon > 0$. Por propiedad arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \epsilon/2$ si $n > n_0$. Elegir una partición P dada por

$$0 = x_0 < x_1 = \frac{1}{n_0 + 1} < x_2 < \dots < x_k = 1$$

tal que $x_i - x_{i-1} < \epsilon/(2n_0)$ para $i = 2, 3, \dots, k$. Entonces

$$S(P, f) - s(P, f) = S(P, f) < \frac{\epsilon}{2} + n_0 \frac{\epsilon}{2n_0} = \epsilon.$$

□

Problema 4. Calcule por definición:

$$\int_a^b e^x dx$$

Solución: Dado que $e^x \in \mathcal{C}[a, b] \Rightarrow e^x \in \mathcal{R}[a, b]$. Entonces consideremos la partición uniforme $[a, b]$ cuyo termino general esta dado por:

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

mientras que el largo puede ser expresado como:

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$$

Luego podemos calcular como sigue:

$$\begin{aligned} \int_a^b e^x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x_k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} e^a \sum_{k=0}^{n-1} e^{\left(\frac{b-a}{n}\right)^k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} e^a \left(\frac{e^{\frac{b-a}{n}} - 1}{e^{\frac{b-a}{n}} - 1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (e^b - e^a) \underbrace{\left[\frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)}{e^{\frac{b-a}{n}} - 1} \right]}_{\rightarrow 1} \\ &= e^b - e^a \end{aligned}$$

□

Problema 5.

Utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo, determine:

(a) $\int_1^2 (x^2 - 3) dx$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2(x) dx$

- (c) El área de la región delimitada por la gráfica de $y = 2x^2 - 3x + 2$, el eje x y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$.

Solución:

(a)

$$\int_1^2 (x^2 - 3)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x \right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 6 \right) - \left(\frac{1}{3} - 3 \right) = -\frac{2}{3}$$

□

(b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2(x)dx = \tan(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - 0 = 1$$

□

- (c) Dado que $y > 0$, podemos interpretar a la integral de Riemann como el área bajo la curva. Así,

$$\text{Área} = \int_0^2 (2x^2 - 3x + 2)dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \Big|_0^2 = \frac{10}{3}$$

□

Problema 6. Calcule los siguientes límites:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) \right]$

Solución: Existen varias maneras de realizar el límite anterior, pero dado que conocemos la integral de Riemann, intentaremos utilizar dicha herramienta para realizar el cálculo. La idea es formar una suma de Riemann y, dado que existe un paso al límite, transformarla en una integral fácil de calcular. Notemos que:

$$\begin{aligned} S(n) &= \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) \\ &= \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + \underbrace{\sin\left(\frac{2n\pi}{n}\right)}_{=0} \\ &= \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \end{aligned}$$

Con ello,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} S(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(x)dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 4} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2}$$

Solución: Similar al ejercicio anterior.

$$S(n) = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 4} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$$

Pero, si dividimos, tanto numerador como denominador, por n^2 tendremos:

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{\frac{1}{n}}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

Ahora, lo anterior es muy parecido a una suma de Riemann, haciendo $b - a = 1$ y $c_k = \frac{k}{n}$. Para que ambos resultados sean consistentes, $a = 0$ y $b = 1$. Así,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + c_k^2} \Delta x_k \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx \\ &= \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

□

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+(n-1)}$$

Solución: Sea

$$S(n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+(n-1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+n}$$

Notemos que:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \frac{1}{n}$$

Igual que en el caso anterior, si $b - a = 1$ y $c = k/n$ entonces $a = 0$ y $b = 1$. Así,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= \ln(1+1) - \ln(1+0) = \ln(2) \end{aligned}$$

□

Problema 7. Demuestre que si la función h es continua y f, g son derivables y si

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t) dt$$

entonces se tiene que $F'(x) = h(g(x)) \cdot g'(x) - h(f(x)) \cdot f'(x)$. Utilice este hecho para resolver los siguientes problemas:

(a) Halle la derivada de

$$F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} (1-t) \sin(t^2) dt$$

(b) Para $x > 0$, pruebe que

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} - \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

es constante y determine su valor.

(c) Dada la función

$$f(x) = 3 + \int_0^x \frac{1 + \sin(t)}{2 + t^2} dt$$

Determine un polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$, $p''(0) = f''(0)$

(d) Si f es una función continua de período T , demuestre que para todo número real a se tiene

$$\int_0^T f(t) dt = \int_a^{T+a} f(t) dt$$

Agradecimientos a Sebastián Urrutia por el buen problema, muy ilustrativo

Solución:

Dado que la función h es continua entonces, por el *Teorema Fundamental del Cálculo*, existe una función H derivable tal que $H' = h$. Con ello,

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t) dt = H(g(x)) - H(f(x))$$

Derivando la expresión anterior con respecto a x , dado que F es diferenciable -porque h es continua- al igual que H , tenemos:

$$F'(x) = H'(g(x)) \cdot g'(x) - H'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Pero $H'(u) = h(u)$, entonces:

$$F'(x) = h(g(x)) \cdot g'(x) - h(f(x)) \cdot f'(x)$$

□

(a) Tenemos que:

$$F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} (1-t) \sin(t^2) dt = \underbrace{\int_{\sqrt{x}}^{x^2} \sin(t^2) dt}_{F_1(x)} - \underbrace{\int_{\sqrt{x}}^{x^2} t \sin(t^2) dt}_{F_2(x)}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} F'_1(x) &= \left(\sin(x^4)2x - \sin(x)\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = 2x^2 \sin(x^4) - \sin(x)\frac{\sqrt{x}}{2} \\ F'_2(x) &= x^2 \sin(x^4)2x - \sqrt{x} \sin(x)\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x^3 \sin(x^4) - \frac{\sin(x)}{2} \end{aligned}$$

Así:

$$F'(x) = 2x^2 \sin(x^4) - \sin(x)\frac{\sqrt{x}}{2} + 2x^3 \sin(x^4) - \frac{\sin(x)}{2}$$

□

(b) Notemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\int_1^x \frac{dt}{1+t^2} \right) &= \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{d}{dx} \left(\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{dt}{1+t^2} \right) &= -\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Por tanto, $F'(x) = 0$. Ahora, $F(1) = 0$ y con ello la constante es igual a 0.

□

(c) Calculando:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 + \int_0^x \frac{1 + \sin(t)}{2 + t^2} dt \\ f'(x) &= \frac{1 + \sin(x)}{2 + x^2} \\ f''(x) &= \frac{2 \cos(x) + \cos(x)x^2 - 2x - 2x \sin(x)}{(2 + x^2)^2} \\ p(x) &= ax^2 + bx + c \\ p'(x) &= 2ax + b \\ p''(x) &= 2a \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned} f(0) = 3 = c = p(0) & \quad f'(0) = \frac{1}{2} = b = p'(0) & \quad f''(0) = \frac{1}{2} = 2a = p''(0) \\ \therefore c = 3 & \quad \therefore b = \frac{1}{2} & \quad \therefore a = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Así:

$$p(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$$

□

(d) Sea $g(x) = \int_x^{x+T} f(t)dt$. Entonces:

$$g'(x) = f(x+T) - f(x)$$

Pero f es periódica, por tanto $\forall x \in \mathbb{R}$ se cumple que $f(x+T) = f(x)$. Por tanto, $g'(x) = 0$.

Así, g es una función constante y finalmente, evaluando en $x = 0$ y $x = a$:

$$\int_0^T f(t)dt = \int_a^{T+a} f(t)dt$$

□

Problema 8. Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - e^{x^2/2}} \int_0^{3x} x e^{t^2} dt$$

Solución: Note que el límite es de la forma $0/0$. Luego notamos que el numerador está dado por:

$$x \int_0^{3x} e^{t^2} dt$$

son dos funciones de x , usando la Regla de L'Hopital tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{3x} e^{t^2} dt + x \left(e^{(3x)^2} \cdot 3 \right)}{-x e^{x^2/2}}$$

El límite nuevamente es de la forma $0/0$, usando L'Hopital:

$$- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(3x)^2} \cdot 3 + 3e^{(3x)^2} + x \left(6e^{(3x)^2} \cdot (9x) \right)}{e^{x^2/2} + x^2 e^{x^2/2}} = -6$$

□

Problema propuesto 1. Usando integrales de Riemann de funciones apropiadas encuentre los siguientes límites:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} \right), \quad k \geq 0,$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt{(n+1)(n+2) \cdots (n+n)}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{1/n}}{n+1} + \frac{2^{2/n}}{n+1/2} + \cdots + \frac{2^{n/n}}{n+1/n} \right)$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f(1/n)f(2/n) \cdots f(n/n)},$ donde f es positiva y continua en $[0, 1]$.

Problema propuesto 2. Muestre que si la derivada de f es continua en $[0, 1]$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x) dx \right) = \frac{f(1) - f(0)}{2}.$$

Usando este resultado calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1} \right), \quad k \geq 0.$$

Indicación: Use TVM apropiadamente en los intervalos dados por la partición $([x_{i-1}, x_i])$, luego use el hecho de que f' alcanza su máximo y su mínimo en cada uno de estos intervalos para acotar la suma correspondiente. Finalmente use el hecho de que f' es continua, por lo tanto integrable y reconozca la suma de Riemann.