

Ayudantía 5

Derivadas

Problema 1. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, función derivable en todo (a, b) . Sea x_0 en (a, b) fijo, se define:

$$g(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

Pruebe que $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = f'(x_0)$

Solución: Notemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} g(h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \\ &= \frac{1}{2} f'(x_0) + \frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 + u)}{-u} \\ &= \frac{1}{2} f'(x_0) + \frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{u} \\ &= \frac{1}{2} f'(x_0) + \frac{1}{2} f'(x_0) \\ &= f'(x_0) \end{aligned}$$

Donde en el límite se uso el cambio de variable $u = -h$. □

Problema 2. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivables tales que $f(0) = 0$, $g(0) = 1$ y además:

$$f'(x) = g(x) \quad ; \quad g'(x) = f(x)$$

Demuestre que $h(x) = f^2(x) - g^2(x)$ es constante y encuentre su valor.

Solución: Derivando: $h'(x) = 2f(x)f'(x) - 2g(x)g'(x) = 2f(x)g(x) - 2g(x)f(x) = 0$, luego h es constante. Para calcular su valor solo basta evaluar en algún punto, en particular en 0.

$$h(x) = h(0) = 0^2 - 1^2 = -1$$
□

Problema 3. Derive tristemente usando la definición:

- (a) $f(x) = x^4$
- (b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
- (c) $f(x) = \sin^2(x)$

Solución:

(a)

$$\begin{aligned}
 f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x - a} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 + a^2)(x + a)(x - a)}{x - a} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + a^2)(x + a) \\
 &= (2a^2)(2a) = 4a^3
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$f'(x) = 4x^3$$

□

(b)

$$\begin{aligned}
 f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-a^2}}{x-a} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-a^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1-x^2 - (1-a^2)}{(x-a)(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-a^2})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-(x^2 - a^2)}{(x-a)(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-a^2})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-(x+a)}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-a^2}} \\
 &= \frac{-2a}{2\sqrt{1-a^2}} = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

□

(c)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x+h) - \sin^2 x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos x \sin h + \cos h \sin x)^2 - \sin^2 x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x \sin^2 h + 2 \cos h \cos x \sin h \sin x + \cos^2 h \sin^2 x - \sin^2 x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos^2 x \underbrace{\frac{\sin^2 h}{h}}_{\rightarrow 0} + 2 \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\cos h}_{\rightarrow 1} \cos x \sin x - \sin^2 x \underbrace{\frac{1 - \cos^2 h}{h}}_{\rightarrow 0} \\
 &= 2 \sin x \cos x
 \end{aligned}$$

□

Problema 4. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable con $f(k) = k + 1$ y $f'(k) = 2k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Calcular $g'(1)$ donde $g = f \circ f \circ f \circ f$.

Solución: Por la regla de la cadena:

$$g'(1) = f'(f(f(f(1)))) \cdot f'(f(f(1))) \cdot f'(f(1)) \cdot f'(1)$$

Pero $f'(1) = 2$ y $f(1) = 1 + 1 = 2$. Luego:

$$g'(1) = f'(f(f(2))) \cdot f'(f(2)) \cdot f'(2) \cdot 2$$

Pero: $f'(2) = 4$ y $f(2) = 2 + 1 = 3$. Luego:

$$g'(1) = f'(f(3)) \cdot f'(3) \cdot 4 \cdot 2$$

Pero: $f'(3) = 6$ y $f(3) = 3 + 1 = 4$. Luego:

$$g'(1) = f'(4) \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$$

Y como $f'(4) = 8$:

$$g'(1) = 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 384$$

□

Problema 5. Derive alegremente:

- (a) $f(x) = x^x$
- (b) $f(x) = \sqrt{\sin x} \sqrt{\tan x} + \ln(1/x)$
- (c) $f(x) = \sqrt[\alpha]{x^\beta + \pi x^\gamma}$
- (d) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^3 + 2x}$
- (e) $f(x) = \log \left(1 + e^{(e^{x^2})} \right)$

Solución:

(a)

$$f'(x) = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (x \ln x)' = x^x (\ln x + 1)$$

□

(b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{\sin x} \sqrt{\tan x})' + (\ln(1/x))' \\ &= \sqrt{\tan x} \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} + \sqrt{\sin x} \frac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}} + x \cdot (-x^{-2}) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\cos x} + \frac{1}{2\sqrt{\cos^3 x}} - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

□

(c)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((x^\beta + \pi x^\gamma)^{1/\alpha} \right)' \\ &= \frac{1}{\alpha} (x^\beta + \pi x^\gamma)^{\frac{1}{\alpha}-1} \cdot (\beta x^{\beta-1} + \pi \gamma x^{\gamma-1}) \end{aligned}$$

□

(d)

$$f'(x) = \frac{(2 \sin x \cos x)(x^3 + 2x) - (3x^2 + 2)(\sin^2 x)}{(x^3 + 2x)^2}$$

□

(e)

$$f'(x) = \frac{\left(1 + e^{(e^{x^2})}\right)'}{\left(1 + e^{(e^{x^2})}\right)} = \frac{e^{(e^{x^2})} \cdot e^{x^2} \cdot 2x}{1 + e^{(e^{x^2})}}$$

□

Problema 6. Analice la existencia de las siguientes derivadas:

(a) $f(x) = |x^2 - 9|$

(b) $f(x) = \begin{cases} 4x - 1, & x \leq 2; \\ x^2 + 5, & x > 2. \end{cases}$

Solución:

- (a) Claramente la función es continua, por lo que analizamos en los puntos críticos, lo primero es reescribir la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9, & x > 3 \vee x < -3; \\ 9 - x^2, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

La función tendrá derivadas fáciles de calcular, $2x$ si $x > 3 \vee x < -3$ y $-2x$ en el otro caso. El punto en cuestión donde cuestionamos la existencia de derivabilidad es el 3 y el -3 , donde deberá usarse la definición de derivada y calcular límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{9 - x^2}{x - 3} = -6$$

Mientras que por el otro lado:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

Por lo tanto $f'(3)$ no existe. Si hacemos un análisis similar obtendremos que $f'(-3)$ tampoco existe.

□

- (b) Analizando la derivabilidad notamos que $f'(x) = 4$ si $x \leq 2$ y $f'(x) = 2x$ si $x > 2$ Para el 2 en particular tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4x - 1 - 7}{x - 2} = 4$$

Para el otro lado:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 5 - 7}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2}{x - 2} = \text{no existe}$$

La función no es diferenciable, de hecho no es ni continua.

□

Problema 7. Considere la función f definida como:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \sin(1/x), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

con $g(0) = g'(0) = 0$. Determine si existe $f'(0)$ y calcúlela.

Solución: Notemos que:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) \sin(1/h)}{h}$$

Por otro lado

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{g(h)}{h} = 0$$

Por lo tanto:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) \sin(1/h)}{h} = 0$$

Pues $\sin(1/x)$ esta acotada y el teorema del sandwich concluye.

□

Problema 8. Determine todas las rectas tangentes a la curva $y = -x^2 + 1$ que pasan por el punto $(1, 1)$.

Las rectas tangentes a esa curva en el punto $(x_0, y_0) = (x_0, -x_0^2 + 1)$ están dadas por:

$$y - y_0 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) \longrightarrow y - (-x_0^2 + 1) = -2x_0(x - x_0)$$

Como queremos que pase por el punto $(1, 1)$ buscamos entonces los puntos (x_0, y_0) que cumplan con que $(x, y) = (1, 1)$, así:

$$1 + x_0^2 - 1 = -2x_0(1 - x_0) \longrightarrow x_0^2 = 2x_0^2 - 2x_0 \longrightarrow 0 = x_0(x_0 - 2)$$

De donde tenemos los puntos $(0, 1)$ y $(2, -3)$ entonces las rectas que cumplen lo pedido son

$$y - 1 = 0 \quad , \quad y + 3 = -4(x - 2)$$

□