

## Ayudantía 12

### Mix de Integración

**Problema 1.** Sea  $f$  función continua en  $\mathbb{R}$  y sea:

$$g(u) = \int_0^u tf(ut)dt$$

Sabiendo que  $\int_0^4 xf(x)dx = 8$  y  $f(4) = 3$ , determine  $g'(2)$

**Solución:** En  $g$  pongamos  $z = ut \rightarrow dz = udt$ . Cambiando los límites de integración nos queda:

$$g(u) = \frac{1}{u^2} \int_0^{u^2} zf(z)dz$$

Así derivando  $g$  nos queda:

$$g'(u) = -\frac{2}{u^3} \int_0^{u^2} zf(z)dz + 2uf(u^2)$$

Evaluyendo en  $u = 2$  nos queda:

$$g'(2) = -\frac{2}{8} \int_0^4 zf(z)dz + 4f(4) = -\frac{1}{4} \cdot 8 + 4 \cdot 3 = 10$$

□

**Problema 2.** Si  $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{a^2 + t^2}} dt$ , demuestre que:

$$I_n = \frac{1}{n} \left( \sqrt{a^2 + 1} - (n-1)a^2 I_{n-2} \right)$$

**Solución:** Notemos que:

$$I_n = \int_0^1 t^{n-1} \frac{t}{\sqrt{a^2 + t^2}} dt$$

e integrando por partes con  $u = t^{n-1}$  y  $dv = \frac{t}{\sqrt{a^2 + t^2}} dt$  nos queda:

$$\begin{aligned} I_n &= t^{n-1} \sqrt{a^2 + t^2} \Big|_0^1 - (n-1) \int_0^1 t^{n-2} \sqrt{a^2 + t^2} dt \\ &= \sqrt{a^2 + 1} - (n-1) \int_0^1 t^{n-2} \frac{(a^2 + t^2)}{\sqrt{a^2 + t^2}} dt \\ &= \sqrt{a^2 + 1} - (n-1)a^2 \underbrace{\int_0^1 \frac{t^{n-2}}{\sqrt{a^2 + t^2}} dt}_{I_{n-2}} - (n-1) \underbrace{\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{a^2 + t^2}} dt}_{I_n} \end{aligned}$$

Así agrupando términos nos queda:

$$nI_n = \sqrt{a^2 + 1} - (n-1)a^2 I_{n-2} \rightarrow I_n = \frac{1}{n} \left( \sqrt{a^2 + 1} - (n-1)a^2 I_{n-2} \right)$$

□

**Problema 3.** Demuestre que si  $0 < a < b$  entonces:

$$\frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a}$$

**Solución:** Notemos que:

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln b - \ln a = \int_1^b \frac{du}{u} - \int_1^a \frac{du}{u} = \int_a^b \frac{du}{u}$$

Por TVM de las integrales tenemos que:

$$\int_a^b \frac{du}{u} = \frac{1}{c}(b-a) \rightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{du}{u}$$

Con  $a < c < b$ . Como  $a$  y  $b$  son positivos, lo anterior equivale a:

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$$

Reemplazando  $1/c$  y multiplicando por  $b-a$  queda:

$$\frac{b-a}{b} < \underbrace{\int_a^b \frac{du}{u}}_{\ln(b/a)} < \frac{b-a}{a}$$

□

**Problema 4.** Demuestre que si  $f(x)$  es continua y decreciente entonces:

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du$$

es decreciente.

**Solución:** Derivando  $g(x)$  tenemos:

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2}$$

Del TVM de las integrales tenemos que existe  $c \in (0, x)$  tal que  $\int_0^x f(u) du = f(c)(x-0) = xf(c)$ . Así:

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{xf(x) - xf(c)}{x^2} = \frac{1}{x}(f(x) - f(c)) < 0$$

Dado que  $f(x) - f(c) < 0$  pues  $0 < c < x$  y  $f$  es decreciente.

□

**Problema 5.** Encuentre una función  $f$  y un  $a \in (0, \infty)$  tales que:

$$\int_a^{x^2} f(t) \ln(t) dt = x^3 \left( \ln(x) - \frac{1}{3} \right)$$

**Solución:** Si evaluamos en  $x = \sqrt{a}$  tenemos que la integral vale 0 pues integra en un punto. Así:

$$(\sqrt{a})^3 \left( \ln(\sqrt{a}) - \frac{1}{3} \right) = 0$$

Que tiene por soluciones  $a = 0$  y  $a = e^{2/3}$ . Descartamos la primera porque  $a$  no puede ser 0, y por lo tanto  $a = e^{2/3}$ .

Para encontrar la función derivamos. Así:

$$f(x^2) \ln(x^2) \cdot 2x = 3x^2 \left( \ln(x) - \frac{1}{3} \right) + x^3 \frac{1}{x} = 3x^2 \ln(x)$$

Despejando:

$$f(x^2) = \frac{3x}{4} \rightarrow f(x) = \frac{3}{4} \sqrt{x}$$

□

**Problema 6.**

- (a) Considere  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y  $g$  Riemann integrable en  $[a, b]$  y no negativa. Demuestre que existe  $\xi \in [a, b]$  tal que

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

**Solución:** Definamos  $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$  y  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ . Luego se tiene que

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Integrando obtenemos

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx.$$

Si  $\int_a^b g(x) dx = 0$  el resultado es trivial. En caso contrario se tiene

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M,$$

y aplicando TVI sobre la función  $f$  que es continua se obtiene lo pedido.

□

Note que el TVMI se obtiene tomando la función  $g \equiv 1$ .

- (b) Demuestre que  $\exists \xi \in (1, e)$  tal que

$$\int_1^e \ln^{n+1}(x) dx = \ln^n(\xi) \quad n \geq 1.$$

**Solución:** Notar que la integral se puede escribir como

$$\int_1^e \ln^{n+1}(x) dx = \int_1^e \ln^n(x) \ln(x) dx,$$

donde  $\ln^n(x)$  es continua en  $[1, e]$  y  $\ln(x)$  es integrable en  $[1, e]$  pues también es continua y es siempre positiva en este intervalo. Con esto se satisfacen las hipótesis del problema anterior, por lo tanto existe  $\xi \in (1, e)$  tal que

$$\int_1^e \ln^n(x) \ln(x) dx = \ln^n(\xi) \int_1^e \ln(x) dx.$$

Además integrando por partes se tiene que

$$\int_1^e \ln(x) dx = x \ln(x) \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{x} dx = e - (e - 1) = 1.$$

Finalmente

$$\int_1^e \ln^n(x) \ln(x) dx = \ln^n(\xi).$$

□

**Problema 7.** Calcule la integral  $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{\cos^3(x) + \sin^3(x)} dx$ .

**Solución:** Al dividir tanto el numerador como el denominador por  $\cos^3(x)$  se obtiene

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)}}{1 + \tan^3(x)} dx.$$

Ahora usamos la sustitución  $t = \tan(x)$  con la cual  $x = 0 \rightarrow t = 0$  y  $x = \pi/4 \rightarrow t = 1$  y  $dt = \sec^2(x) dx$  por lo tanto

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^3}.$$

Esta integral la resolvemos utilizando fracciones parciales. Se tiene que

$$\frac{1}{1 + t^3} = \frac{1}{(1 + t)(1 - t + t^2)} = \frac{A}{1 + t} + \frac{Bt + C}{t^2 - t + 1} = \frac{(A + C) + t(C - A + B) + t^2(A + B)}{(1 + t)(t^2 - t + 1)}.$$

Luego

$$\begin{aligned} A + C &= 1 \\ C - A + B &= 0 \\ A + B &= 0 \end{aligned}$$

por lo que  $A = 1/3, B = -1/3, C = 2/3$  y luego resulta

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{dt}{1 + t} - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{t}{t^2 - t + 1} dt + \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{dt}{t^2 - t + 1} \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{dt}{1 + t} - \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{2t - 1}{t^2 - t + 1} dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{t^2 - t + 1}. \end{aligned}$$

Para la primera se tiene que

$$\int_0^1 \frac{dt}{1 + t} = \ln(1 + t) \Big|_0^1 = \ln(2),$$

para la segunda

$$\int_0^1 \frac{2t - 1}{t^2 - t + 1} dt = \ln(t^2 - t + 1) \Big|_0^1 = 0$$

y para la tercera completar cuadrados

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^2 - t + 1} = \int_0^1 \frac{dt}{(t - 1/2)^2 + 3/4}$$

usamos  $t - 1/2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan(\theta)$  luego se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{(t - 1/2)^2 + 3/4} &= \int_{\arctan(-1/\sqrt{3})}^{\arctan(1/\sqrt{3})} \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sec^2(\theta)}{\sec^2(\theta)} d\theta \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} (\arctan(1/\sqrt{3}) - \arctan(-1/\sqrt{3})) = \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan(1/\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Finalmente

$$I = \frac{\ln(2)}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(1/\sqrt{3}) = \frac{\ln(2)}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

□

**Propuesto 1.** Calcule las siguientes integrales:

- (a)  $\int \tan^4(x) dx$ . Considere la identidad  $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$
- (b)  $\int \sqrt{1 + e^x} dx$ . Considere el cambio:  $u = \sqrt{1 + e^x}$
- (c)  $\int_0^1 x^2 \arctan(x) dx$ . Integre por partes y use una sustitución trigonométrica adecuada.
- (d)  $\int \frac{x^n}{e^x + \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}} dx$ .  $n \in \mathbb{N}$ . No la afronte usualmente. Piense y Enjoy.

**Propuesto 2.** Sea  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  continua, mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(x) |\sin(nx)| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx.$$

**Indicación:** Separe la integral en intervalos de la forma  $\left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right]$  y luego aplique la propiedad deducida en el problema 6a.