

## Ayudantía 2

Límites de sucesiones.

### Algunas Propiedades:

- Álgebra de límites

Sean  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  sucesiones tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$  (esto es de suma importancia, pues muchas veces se comete el error de intentar separar un límite en límites que ni siquiera existen). Entonces:

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm b_n = a \pm b$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$

(c) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

- Teorema del Sandwich

Sean  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  y  $\{c_n\}$  sucesiones tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  y  $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |r| < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \\ \text{no existe} & \text{si } |r| > 1 \text{ o } r = -1 \end{cases}$

- Si  $\{a_n\}$  es una sucesión de términos positivos tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

**Demostración:** Puesto que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$  existen  $\epsilon > 0$  y  $N \in \mathbb{N}$  tales que  $K = l + \epsilon < 1$  y

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < \epsilon \quad \text{si } n > N$$

luego

$$l - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \epsilon = K$$

Como  $a_n$  es positivo para cualquier  $n$ , tendremos  $a_{n+1} < a_n K$ . Como esto es válido para todo  $n > N$ , podemos reiterar el proceso y llegamos a que:

$$0 < a_{n+1} < a_n K < a_{n-1} K^2 < \dots < a_{N+1} K^{n-N}$$

En vista de que  $0 < K < 1$  concluimos que  $a_{N+1} K^{n-N} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Finalmente el teorema del Sandwich permite concluir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

- Se define el número  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Una propiedad importante que se utilizará es la siguiente:

Llamamos  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Como la sucesión  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge a  $e$ , cualquier subsucesión de ella también lo hará. Por ejemplo podemos concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}}_{c_n} = e$$

puesto que  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  y  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  son subsucesiones de  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

**Problema 1.** Los siguientes problemas consisten en mostrar la variedad de trucos para el cálculo de límites.

(a) Racionalizar y factorizar ( $\frac{\alpha}{n} \rightarrow 0$ ):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{9n^2 + 8n + 100} - \sqrt{9n^2 + 9n - 1000}$$

(b) Nuevamente racionalizar y factorizar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{\sqrt{n^3} + 1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + 1} - n}$$

(c) Factorización apropiada:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2/5)^n}{(1/2)^n + (11/12)^n}$$

(d) Generalización de la factorización:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}}$$

con  $0 < a \leq b$

(e) Cambio de variable:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \sqrt{n^2 + 5n + 1} + n$$

### Solución:

(a) Racionalizando tenemos:

$$\begin{aligned} \sqrt{9n^2 + 8n + 100} - \sqrt{9n^2 + 9n - 1000} &= \% \cdot \frac{\sqrt{9n^2 + 8n + 100} + \sqrt{9n^2 + 9n - 1000}}{\sqrt{9n^2 + 8n + 100} + \sqrt{9n^2 + 9n - 1000}} \\ &= \frac{9n^2 + 8n + 100 - (9n^2 + 9n - 1000)}{\sqrt{9n^2 + 8n + 100} + \sqrt{9n^2 + 9n - 1000}} \\ &= \frac{-n + 1100}{\sqrt{9n^2 + 8n + 100} + \sqrt{9n^2 + 9n - 1000}} \\ &= \frac{n \left( -1 + \frac{1100}{n} \right)}{n \left( \sqrt{9 + \frac{8}{n} + \frac{100}{n}} + \sqrt{9 + \frac{9}{n} - \frac{1000}{n}} \right)} \\ &= \frac{-1 + \frac{1100}{n}}{\sqrt{9 + \frac{8}{n} + \frac{100}{n}} + \sqrt{9 + \frac{9}{n} - \frac{1000}{n}}} \end{aligned}$$

El siguiente paso consiste en hacer  $n \rightarrow \infty$  y notar que los términos de la forma  $\frac{\alpha}{n}$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$  tenderán a 0. Lo demás es notar que las raíces del denominador valdrán 3. Por lo tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{9n^2 + 8n + 100} - \sqrt{9n^2 + 9n - 1000} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{1100}{n}}{\sqrt{9 + \frac{8}{n} + \frac{100}{n}} + \sqrt{9 + \frac{9}{n} - \frac{1000}{n}}} = \frac{-1}{6}$$

□

- (b) Para el siguiente problema es necesario racionalizar en el numerador y el denominador. Recordando que  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$  y que  $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ , además es útil notar que  $\sqrt{n} = \sqrt[3]{\sqrt{n^3}}$  por lo que en el problema tenemos que racionalizar usando:

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{n^3} + 1} - \sqrt[3]{\sqrt{n^3}}}{\sqrt{n^2 + 1} - n} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 1} + n}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \cdot \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{n^3} + 1)^2} + \sqrt[3]{(\sqrt{n^3} + 1)\sqrt{n^3} + n}}{\sqrt[3]{(\sqrt{n^3} + 1)^2} + \sqrt[3]{(\sqrt{n^3} + 1)\sqrt{n^3} + n}}$$

Realizando todas las expansiones y reducciones respectivas obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n^2 + 1} + n}{\sqrt[3]{(\sqrt{n^3} + 1)^2} + \sqrt[3]{(\sqrt{n^3} + 1)\sqrt{n^3} + n}} &= \frac{n \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1 \right)}{n \left( \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{\sqrt{n^3}}} + 1 \right)} \\ &= \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{\sqrt{n^3}}} + 1} \end{aligned}$$

Y usando el argumento del problema anterior tenemos que el límite pedido es  $\frac{2}{3}$  □

- (c) El problema consiste en factorizar por el mayor número en el denominador con el fin de obtener términos de la forma  $r^n$  con  $|r| < 1$ , con lo que ocurrirá que cuando  $n \rightarrow \infty \Rightarrow r^n \rightarrow 0$ . Luego para el problema en particular:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2/5)^n}{(1/2)^n + (11/12)^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2/5)^n}{(11/12)^n} \cdot \frac{1}{(12/22)^n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(24/55)^n}{(12/22)^n + 1} \\ &= 0 \end{aligned} \quad \square$$

- (d) Es análogo al anterior:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n \left( (a/b)^n + 1 \right)}{b^n \left( a(a/b)^n + b \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a/b)^n + 1}{a(a/b)^n + b} \\ &= \frac{1}{b} \end{aligned} \quad \square$$

- (e) Para este mi recomendación es nunca meterse con límites hacia menos infinito. Recomendando hacer un cambio de variable  $m = -n$  con lo que cuando  $n \rightarrow -\infty \Rightarrow m \rightarrow \infty$ . Así el límite nos queda:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{(-m)^2 + 5(-m) + 1} + (-m) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{m^2 - 5m + 1} - m \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{m^2 - 5m + 1} - m \cdot \frac{\sqrt{m^2 - 5m + 1} + m}{\sqrt{m^2 - 5m + 1} + m} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^2 - 5m + 1 - m^2}{\sqrt{m^2 - 5m + 1} + m} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m(-5 + 1/m)}{m \left( \sqrt{1 - \frac{5}{m} + \frac{1}{m^2}} + 1 \right)} \\ &= -\frac{5}{2} \end{aligned} \quad \square$$

**Problema 2.** Calcule la siguiente variedad de límites:

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n!}$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cos n}{n!}$

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{3n}$

(d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{n^{2012}}{n+2}\right) + \frac{1}{3} \cos^2 \left(\frac{n^{2012}}{n+2}\right)\right)^n$

(e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$

(f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^n + \pi^n}$

**Solución:**

(a) Para  $n > 3$  tenemos

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{1}{\underbrace{(n-3)!}_{\rightarrow 0}} \cdot \frac{n}{\underbrace{n-2}_{\rightarrow 1}} \cdot \frac{n}{\underbrace{n-1}_{\rightarrow 1}} \cdot \frac{n}{\underbrace{n}_{\rightarrow 1}}$$

luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n!} = 0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

□

(b) Notamos que  $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ . Luego

$$-\frac{3^n}{n!} \leq \frac{3^n \cos n}{n!} \leq \underbrace{\frac{3^n}{n!}}_{a_n}$$

Para la sucesión  $\{a_n\}$  tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3 \cdot 3^n}{(n+1) \cdot n!}}{\frac{3^n}{n!}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} \\ &= 0 < 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{3^n}{n!} = 0$ .

Finalmente, por el teorema del Sandwich  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cos n}{n!} = 0$ .

□

(c)

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{3n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)} \right]^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-3} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)}}_{\rightarrow e} \right]^3 \cdot \underbrace{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^3}_{\rightarrow 1} \\
&= e \cdot e \cdot e \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = e^3
\end{aligned}$$

□

(d) Para todo  $x \in \mathbb{R}$  observamos que

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq \sin^2 x \leq 1$$

luego tendremos que

$$0 \leq \frac{1}{4} \sin^2 \left( \frac{n^{2012}}{n+2} \right) + \frac{1}{3} \cos^2 \left( \frac{n^{2012}}{n+2} \right) \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

luego podemos elevar a  $n$  y obtenemos

$$0 \leq \left( \frac{1}{4} \sin^2 \left( \frac{n^{2012}}{n+2} \right) + \frac{1}{3} \cos^2 \left( \frac{n^{2012}}{n+2} \right) \right)^n \leq \left( \frac{7}{12} \right)^n$$

notamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{7}{12} \right)^n = 0$ . Luego aplicamos el teorema del Sandwich y concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{4} \sin^2 \left( \frac{n^{2012}}{n+2} \right) + \frac{1}{3} \cos^2 \left( \frac{n^{2012}}{n+2} \right) \right)^n = 0$$

□

(e) Notemos que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

Por lo que lo anterior cumple la siguiente desigualdad para cada término:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2}}$$

Entonces agrupando términos tenemos:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2}} = 1$$

Y notando que  $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n}}$ , por lo que tenemos finalmente usando límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+1/n}}}_{\rightarrow 1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq 1$$

Así por el teorema del sandwich concluimos que el límite buscado es 1.

□

(f)

$$\sqrt[n]{e^n + \pi^n} = \pi \underbrace{\sqrt[n]{\left(\frac{e}{\pi}\right)^n + 1}}_{\rightarrow 1} \rightarrow \pi$$

□

**Problema 3.** Calcule:

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^4}{n^3 - 1} - \frac{n^3}{n^2 + n + 1} \right)$
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - 3\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+3})$
- (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + 2n + 1} \right)^n$
- (d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^{4n}$
- (e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (1 - 1/n)^4}{1 - (1 - 1/n)^3}$
- (f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^n + \pi^n}$
- (g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1^p + 2^p + \dots + n^p}$
- (h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^n$

**Solución:**

(a)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^4}{n^3 - 1} - \frac{n^3}{n^2 + n + 1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4(n^2 + n + 1) - n^3(n^3 - 1)}{(n^3 - 1)(n^2 + n + 1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + n^4 - n^3}{(n^3 - 1)(n^2 + n + 1)} \cdot \frac{1/n^5}{1/n^5} \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

(b) Escribimos

$$\sqrt{n+1} - 3\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+3} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}) + 2(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2})$$

Luego racionalizamos cada binomio

$$\sqrt{n+1} - 3\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+3} = \frac{2}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}$$

y cada uno de los términos del lado derecho tiende a 0. Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - 3\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+3}) = 0$$

□

(c) Tenemos que:

$$\begin{aligned} \left( \frac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + 2n + 1} \right)^n &= \left( 1 + \frac{2}{(n+1)^2} \right)^n \\ &= \left( \underbrace{\left( 1 + \frac{2}{(n+1)^2} \right)^{(n+1)^2}}_{\rightarrow e^2} \right)^{\frac{n}{(n+1)^2}} \end{aligned}$$

Lo anterior nos haría pensar que el límite es 1, pero para concluir el límite formalmente es necesario usar sandwich, es sabido que la sucesión  $(1 + 1/n)^n$  es una sucesión creciente como sus subsucesiones. Por lo que en este caso el término de la forma puede ser acotado por

$$1 \leq \left(1 + \frac{2}{(n+1)^2}\right)^{(n+1)^2} \leq 2e^2 \longrightarrow 1^{\frac{n}{(n+1)^2}} \leq \left(\left(1 + \frac{2}{(n+1)^2}\right)^{(n+1)^2}\right)^{\frac{n}{(n+1)^2}} \leq (2e^2)^{\frac{n}{(n+1)^2}}$$

Al hacer el límite es claro que en la derecha y en la izquierda tienden a 1, y por lo tanto por sandwich el límite es 1.  $\square$

(d)

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{4n} = \underbrace{\left(\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^4}_{\rightarrow e^4} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-4}}_{\rightarrow 1} \rightarrow e^4 \cdot 1 = e^4$$

$\square$

(e)

$$\frac{1 - (1 - 1/n)^4}{1 - (1 - 1/n)^3} = \frac{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^4}{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^3}$$

$$= \frac{\frac{n^4 - (n-1)^4}{n^4}}{\frac{n^3 - (n-1)^3}{n^3}}$$

$$= \frac{4n^3 - 6n^2 + 4n - 1}{3n^3 - 3n^2 + n} \rightarrow \frac{4}{3}$$

$\square$

(f)

$$\sqrt[n]{e^n + \pi^n} = \pi \sqrt[n]{\underbrace{\left(\frac{e}{\pi}\right)^n}_{\rightarrow 1} + 1} \rightarrow \pi$$

$\square$

(g) Es claro que:  $1^p \leq 1^p + 2^p + \dots + n^p \leq n^p + \dots + n^p = n^{p+1}$ . Luego aplicando raíz n-esima, es claro que

$$\sqrt[p]{1} \leq \sqrt[p]{1^p + 2^p + \dots + n^p} \leq (\sqrt[p]{n})^{p+1}$$

Así es claro que al hacer  $n \rightarrow \infty$  ambos extremos irán a 1, y por el teorema del sandwich el límite pedido es 1.  $\square$

(h)

$$\begin{aligned} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n &= \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n} \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^n} \\ &= \frac{1}{\underbrace{\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^{n-1}}_{\rightarrow 1/e^2}} \cdot \frac{1}{\underbrace{\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^1}_{\rightarrow 1}} \\ &\rightarrow e^{-2} \end{aligned}$$

$\square$

**Problema 4.** Sea  $a_n$  con  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 5$  y  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n - \frac{1}{a_{n-1}} \right)$ , muestre que  $a_n$  no converge.

**Solución:** Supongamos que converge a  $L$  entonces:

$$L = \frac{1}{2} \left( L - \frac{1}{L} \right) \rightarrow L^2 = -1 \rightarrow \leftarrow$$

□

**Problema 5.** Considere  $a_{n+1} = \frac{6a_n^2 + 6}{a_n^2 + 11}$ , con  $a_1 = 4$ . Pruebe que  $a_n$  converge y calcule su límite. (Utilice que  $a_n \geq 3$ )

**Solución:** Notemos:

$$a_{n+1} = 6 \cdot \frac{a_n^2 + 1}{a_n^2 + 11} = 6 \cdot \frac{a_n^2 + 11 - 10}{a_n^2 + 11} = 6 \left( 1 - \frac{10}{a_n^2 + 11} \right)$$

Ahora probaremos por inducción que  $a_n \geq 3 \forall n \in \mathbb{N}$ .

Para el caso base tenemos que  $a_1 = 4 \geq 3$ . Luego aceptamos para el caso  $a_n \geq 3$  y nos disponemos a probar que  $a_{n+1} \geq 3$ . Usando que  $a_n \geq 3$  tenemos que:

$$a_n^2 + 11 \geq 20 \Rightarrow \frac{1}{a_n^2 + 11} \leq \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{10}{a_n^2 + 11} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{10}{a_n^2 + 11} \geq -\frac{1}{2}$$

Ahora como  $1 \geq 1$  si sumamos desigualdades tenemos:

$$1 - \frac{10}{a_n^2 + 11} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 6 \left( 1 - \frac{10}{a_n^2 + 11} \right) \geq 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow a_{n+1} \geq 3$$

Probando lo pedido. Ahora intentaremos probar que es decreciente, notemos que

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{6a_n^2 + 6}{a_n^2 + 11} = \frac{a_n^3 - 6a_n^2 + 11a_n - 6}{a_n^2 + 11} = \frac{(a_n - 1)(a_n - 2)(a_n - 3)}{a_n^2 + 11}$$

Como  $a_n \geq 3 \forall n \in \mathbb{N}$ , entonces tanto numerador como denominador son mayores que 0 (o igual) y por lo tanto la sucesión es decreciente (no estrictamente decreciente, pero decreciente al fin). Luego como hemos probado que es decreciente y acotada, la sucesión es convergente. Para calcular el límite ponemos:

$$L = 6 \cdot \frac{L^2 + 1}{L^2 + 11} \rightarrow L^3 - 6L^2 + 11L - 6 = (L - 1)(L - 2)(L - 3) = 0$$

Donde tenemos 3 posibles soluciones para  $L$ , descartamos las 2 primeras pues  $a_n \geq 3$  y por lo tanto  $L = 3$ .

□

**Problema 6.** Considere las sucesiones  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y los reales  $x$  e  $y$  tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$$

Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = |x - y|.$$



**Solución:** Sea  $\epsilon > 0$ . Como  $x_n \rightarrow x$  se tiene que existe un natural  $n_0$  tal que siempre que  $n \geq n_0$  se cumple entonces que

$$|x_n - x| < \epsilon/2 \quad (6.1)$$

También se tiene que  $y_n \rightarrow y$ , así que existe otro natural  $n_1$  tal que siempre que  $n \geq n_1$  se cumplirá entonces que

$$|y_n - y| < \epsilon/2 \quad (6.2)$$

Tomemos  $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$ , entonces notamos que para  $n \geq n_3$  se cumplen simultáneamente las desigualdades (6.1) y (6.2). Luego aplicando la conocida desigualdad triangular obtendremos los siguientes resultados:

$$|x - y| = |x - x_n + x_n - y_n + y_n - y| \leq |x_n - x| + |x_n - y_n| + |y_n - y|$$

ahora reordenamos términos y usamos (6.1) y (6.2)

$$|x - y| - |x_n - y_n| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \quad (6.3)$$

A continuación usamos un procedimiento similar. Tenemos que

$$|x_n - y_n| = |x_n - x + x - y + y - y_n| \leq |x_n - x| + |x - y| + |y_n - y|$$

y concluimos que

$$|x_n - y_n| - |x - y| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \quad (6.4)$$

De (6.3) y (6.4) se sigue que si  $n \geq n_3$  entonces

$$||x_n - y_n| - |x - y|| < \epsilon$$

□

**Problema 7.** Considere  $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$  con  $a_1 = 3$ . Pruebe que  $a_n$  converge y calcule su límite.

**Solución:** Trataremos de probar que 1 es cota inferior de la sucesión. Lo haremos por inducción. Para el caso base tenemos que  $a_1 = 3 \geq 1$ , aceptamos para el caso  $a_n \geq 1$ . Buscamos probar que  $a_{n+1} \geq 1$ . Así:

$$\begin{aligned} a_n \geq 1 &\Rightarrow \frac{1}{a_n} \leq 1 \\ &\Rightarrow -\frac{1}{a_n} \geq -1 \\ &\Rightarrow 2 - \frac{1}{a_n} \geq 2 - 1 \\ &\Rightarrow a_{n+1} > 1 \end{aligned}$$

Notemos que  $a_2 = 2 - 1/3 = 5/3 < 3 = a_1$  por lo que debería ser una función decreciente. Usando nuevamente inducción ya tenemos el caso base, por otra parte aceptamos para  $a_n < a_{n-1}$  y buscamos probar que  $a_{n+1} < a_n$ . Así:

$$\begin{aligned} a_n < a_{n-1} &\Rightarrow \frac{1}{a_n} > \frac{1}{a_{n-1}} \\ &\Rightarrow -\frac{1}{a_n} < -\frac{1}{a_{n-1}} \\ &\Rightarrow 2 - \frac{1}{a_n} < 2 - \frac{1}{a_{n-1}} \\ &\Rightarrow a_{n+1} < a_n \end{aligned}$$

Probando entonces que es decreciente; como ya vimos que es acotada entonces la sucesión es convergente. Para calcular el límite:

$$L = 2 - \frac{1}{L} \rightarrow L^2 - 2L + 1 = 0 \rightarrow (L - 1)^2 = 0 \rightarrow L = 1$$

Así el límite buscado es 1.

□