PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1640 - ECUACIONES DIFERENCIALES

Ecuaciones Diferenciales

Problemas Resueltos

Rodrigo Henríquez Auba
Nicolás Morales Macaya
Sebastián Urrutia Quiroga
Roberto Zúñiga Valladares

El siguiente apunte tiene una serie de problemas resueltos para el curso de ecuaciones diferenciales ordinarias. A pesar de que los tipos de problemas y el orden en que se presentan es para el curso dictado en la PUC, se espera que los problemas sea una buena colección para cualquier curso de ecuaciones diferenciales dictado en cualquier universidad, y que por supuesto no todo esta aquí, por lo que el estudiante que utiliza esta colección de problemas no crea que con solo esto se cubre la completitud del curso. No deje de estudiar, y si puede intente hacer los problemas por su cuenta antes de ver la solución.

Se agradece a la facultad de matemáticas de la PUC y a los profesores por las pruebas resueltas y los problemas utilizados en este apunte. Se agradece además a todas las personas que colaboraron con problemas, como Fabián Cadiz, Diego Kaulen, Pablo Marchant y muchos mas que colaboraron, ya sea directamente o con sus problemas.

Los autores

Índice general

1

Ecuaciones diferenciales de primer orden

1.1. Métodos de Solución

Problema 1.1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $(t^2 - xt^2)x' + x^2 + tx^2 = 0$

(b) $x' = x - x^2$

(c) $x^2 \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+1}{3y^2+1}$

Solución:

(a) Arreglando la ecuación llegamos:

$$t^2(1-x)x' + x^2(1+t) = 0 \longrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{x-1}\frac{1+t}{t^2}$$

que es de variables separables:

$$\frac{x-1}{x^2}dx = \frac{1+t}{t^2}dt \longrightarrow \int \frac{x-1}{x^2}dx = \int \frac{1+t}{t^2}dt$$

Así podemos dejar $x(t)$ expresada de forma implícita :

$$\ln|x| + \frac{1}{x} = -\frac{1}{t} + \ln|t| + C$$

Comentario: Es necesario notar que luego de normalizar la ecuación diferencial, la función $f(x,t) = \frac{x^2}{x-1}\frac{1+t}{t^2}$ no es continua para x por lo que no podemos asegurar existencia de solución según el valor inicial. Esto se verá mas adelante en el curso. $\square$

(b) Evidentemente es de variables separables:

$$\int \frac{dx}{x-x^2} = \int dt \longrightarrow \int \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}dx = t + C \longrightarrow \ln|x| - \ln|1-x| = t + C$$

Aquí inmediatamente descartamos las soluciones $x(t) = 0$ y $x(t) = 1$. Así:

$$\ln\left|\frac{x}{1-x}\right| = t + C \longrightarrow \frac{x}{1-x} = \underbrace{A}_{\pm e^C} e^t \longrightarrow x(t) = \frac{Ae^t}{1+Ae^t}$$

Aquí si ponemos $A = 0$ recuperamos la solución $x(t) = 0$. Así la solución para este problema es:

$$x(t) = \frac{Ae^t}{1+Ae^t}, \qquad x(t) = 1$$

Por otro lado si dividimos arriba y abajo por Ae^t y llamamos $A^{-1} = B$ tenemos:

$$x(t) = \frac{1}{Be^{-t}+1}$$

De esta forma con $B = 0$ recuperamos la solución $x(t) = 1$ por lo que la solución en este caso es:

$$x(t) = \frac{1}{Be^{-t}+1}, \qquad x(t) = 0$$

Comentario: Cuando analicemos el campo de direcciones entenderemos que estas soluciones particulares están fuertemente relacionadas con la familia de soluciones que obtuvimos (es en general a como tiende el campo de direcciones para parámetros que tienden a infinito). □

(c) Separando variables:

$$\int 3y^2 + 1dy = \int \frac{x^2+1}{x^2}dx \longrightarrow y^3 + y = x - \frac{1}{x} + C$$

□

Problema 1.2. Encuentre las funciones $y(x)$ que satisfacen la ecuación:

$$\int_0^1 y(sx)ds = 2y(x)$$

Solución: Haciendo un cambio de variable $u = sx$ se obtiene:

$$\frac{1}{x}\int_0^x y(u)du = 2y \longrightarrow \int_0^x y(u)du = 2yx$$

derivando respecto a x:

$$y(x) = 2y + 2y'x \longrightarrow -\frac{y}{x} = 2\frac{dy}{dx}$$

Así separando variables e integrando:

$$-\int \frac{dx}{2x} = \int \frac{dy}{y} \longrightarrow -\frac{1}{2}\ln|x| + C = \ln|y| \longrightarrow y^2 = \frac{A}{x}$$

□

Problema 1.3. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales y encuentre el intervalo de solución (si es posible):

(a) $y' - 3y = e^x$ con $y(0) = y_0$

(b) $\dot{x} - \dfrac{2}{t+1}x = (t+1)^2$ con $x(0) = 0$

(c) $y + 2xy' = y^2y'$

Solución: Recordemos que toda ecuación lineal de la forma: $y' + P(x)y = Q(x)$ se resuelve multiplicando por el factor integrante: $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ con esto obtenemos:

$$y'e^{\int P(x)dx} + P(x)e^{\int P(x)dx}y = Q(x)e^{\int P(x)dx} \longrightarrow \left(y \cdot e^{\int P(x)dx}\right)' = Q(x)\mu(x)$$

Así podemos integrar:

$$y \cdot \mu(x) = \int Q(x)\mu(x)dx + C \longrightarrow y(x) = C \cdot e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)\mu(x)dx$$

(a) En este caso $P(x) = -3$ y $Q(x) = e^x$, por lo que el factor integrante esta dado por: $\mu(x) = e^{\int -3dx} = e^{-3x}$. Así:

$$y \cdot \mu = \int e^x \cdot e^{-3x}dx = \int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

Por lo que:

$$y(x) = \underbrace{Ce^{3x}}_{y_h} - \underbrace{\frac{1}{2}e^x}_{y_p}$$

Así y_h corresponde a la solución homogénea ($Q(x) = 0$) y y_p corresponde a una solución particular del problema. Ahora usando el dato inicial: $y(0) = y_0$ tenemos:

$$y_0 = C - \frac{1}{2} \to C = y_0 + \frac{1}{2}$$

Así la respuesta es:

$$y(x) = \left(y_0 + \frac{1}{2}\right)e^{3x} - \frac{1}{2}e^x$$

Es claro que el intervalo de solución es todo $\mathbb{R}$.

$\square$

(b) En este caso $P(t) = \frac{-2}{t+1}$ y $Q(t) = (t+1)^2$. Luego $\mu(t) = e^{\int -2/(t+1)dt} = e^{-2\ln(t+1)} = (t+1)^{-2}$. Así:

$$x \cdot \mu = \int (t+1)^{-2}(t+1)^2dt = \int dt = t + C \longrightarrow x = (t+C)(t+1)^2$$

Usando la condición inicial: $0 = C$ Así:

$$x(t) = t(t+1)^2$$

Evidentemente el intervalo de solución es $(-1, \infty)$.

$\square$

(c) Recordemos que $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{x'}$. Así reemplazando por esto:

$$y + 2x\frac{1}{x'} = y^2\frac{1}{x'}$$

Multiplicando por $\dfrac{x'}{y}$ nos queda:

$$x' + \frac{2}{y}x = y$$

una ecuación lineal para x. Multiplicamos por $\mu = e^{\int 2/y dy} = e^{2\ln|y|} = y^2$, así:

$$x \cdot \mu = \int y \cdot y^2 dy \longrightarrow x(y) = \frac{y^2}{4} + \frac{C}{y^2}$$

□

Problema 1.4. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $\dot{x} + tx = t^3x^3$

(b) $y'(x) + 6y(x) = 30y^{2/3}(x)$

Solución: Recordemos que una ecuación de Bernoulli de la forma $y' + P(x)y = Q(x)y^\nu$ se resuelve haciendo el cambio $u = y^{1-\nu}$.

(a) Es una ecuación de Bernoulli con $\nu = 3$, luego el cambio es:

$$u = x^{1-3} = x^{-2} \rightarrow \dot{u} = -2x^{-3}\dot{x} \rightarrow \dot{x} = -\frac{1}{2}x^3\dot{u} = -\frac{1}{2}u^{-3/2}\dot{u}$$

Reemplazando en la ecuación tenemos:

$$-\frac{1}{2}u^{-3/2}\dot{u} + tu^{-1/2} = t^3u^{-3/2}$$

Multiplicando por $-2u^{3/2}$ tenemos:

$$\dot{u} - 2tu = -2t^3$$

Esta ecuación se resuelve multiplicando por el factor integrante: $\mu(t) = e^{\int -2tdt} = e^{-t^2}$, así:

$$u \cdot \mu = \int -2t^3e^{-t^2}dt$$

Así:

$$u(t) = Ce^{t^2} - 2e^{t^2}\int t^3e^{-t^2}dt \longrightarrow x(t) = \left(Ce^{t^2} - 2e^{t^2}\int t^3e^{-t^2}dt\right)^{-1/2}$$

Resolviendo la integral (hacer $z = t^2$ y luego integrar por partes):

$$x(t) = \left[Ce^{t^2} - 2e^{t^2}\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2}(t^2+1)\right)\right]^{-1/2} = \left[Ce^{t^2} + (t^2+1)\right]^{-1/2}$$

□

(b) En este caso $\nu = 2/3$ entonces el cambio:

$$z = y^{1-2/3} = y^{1/3} \to z' = \frac{1}{3}y^{-2/3}y' \;\to\; 3y^{2/3}z' = 3z^2z' = y'$$

reemplazando en la ecuación tenemos:

$$3z^2z' + 6z^3 = 30z^2$$

si multiplicamos por $\frac{1}{3}z^{-2}$ tenemos

$$z' + 2z = 10$$

Multiplicando por el factor integrante: $\mu = e^{\int 2dx} = e^{2x}$:

$$z \cdot \mu = \int 10e^{2x}dx = C + 5e^{2x}$$

Así:

$$z(x) = Ce^{-2x} + 5 \;\longrightarrow\; y(x) = \left(Ce^{-2x} + 5\right)^3$$

□

Problema 1.5. Resuelva las siguientes ecuaciones, empleando el cambio de variables apropiado.

(a) $y' = \dfrac{2y - x}{2x - y}$

(b) $y' = \dfrac{2y - x + 5}{2x - y - 4}$

(c) $y' = (-5x + y)^2 - 4$

Solución:

(a) Como $f(x,y) = \dfrac{2y - x}{2x - y}$ cumple con $f(\alpha x, \alpha y) = f(x,y)$, la ecuación es *homogénea*. Entonces, $y' = f(1, y/x) = \dfrac{2y/x - 1}{2 - y/x} = \dfrac{2v - 1}{2 - v}$. Haciendo el cambio de variables $v = y/x$ tenemos que $y = vx$, y por tanto $y' = v'x + v$. Así,

$$v'x + v = \frac{2v - 1}{2 - v}$$

de donde

$$xv' = \frac{2v - 1}{2 - v} - v = \frac{1 - v^2}{v - 2}$$

Separando variables,

$$\frac{v - 2}{1 - v^2}dv = \frac{dx}{x}$$

Por fracciones parciales,

$$\left(\frac{1}{2(v-1)} - \frac{3}{2}\frac{1}{v+1}\right)dv = \frac{dx}{x}$$

Integrando, obtenemos que:

$$\ln\left(\frac{|v-1|^{1/2}}{|v+1|^{3/2}}\right) = \ln|x| + C$$

La solución implícita es entonces:

$$\frac{|y/x-1|^{1/2}}{|y/x+1|^{3/2}} = C_0 x$$

Debemos agregar las soluciones particulares que se podrían haber perdido en el proceso de resolución, que en este caso corresponden a:

- $v = 1$, o bien $y = x$.
- $v = -1$, o bien $y = -x$.

(b) Sean $x = X - a, y = Y - b$. Ahora, la ecuación queda como sigue:

$$Y' = \frac{2Y - X + a + 5 - 2b}{2X - Y + b - 4 - 2a}$$

Buscamos a, b tales que transformen la ecuación anterior en homogénea; i.e.

$$a + 5 - 2b = b - 4 - 2a = 0 \longrightarrow a = -1, b = 2$$

Así, la ecuación queda como

$$Y' = \frac{2Y - X}{2X - Y}$$

cuya solución fue calculada en el apartado anterior:

- $\dfrac{|Y/X-1|^{1/2}}{|Y/X+1|^{3/2}} = C_0 X$, y con ello $\dfrac{|(y+2)/(x-1)-1|^{1/2}}{|(y+2)/(x-1)+1|^{3/2}} = C_0(x-1)$
- $Y = X$, y por tanto $y = x - 3$.
- $Y = -X$, y por tanto $y = -x - 1$.

(c) Resolvamos algo más general: $y' = f(ax+by+c), b \neq 0$. Notemos que, haciendo $u = ax+by+c$ tenemos que $u' = a + by' \to y' = \dfrac{u'-a}{b}$. Así,

$$\frac{u'-a}{b} = f(u) \longleftrightarrow \frac{du}{dx} = bf(u) + a \longleftrightarrow \frac{du}{bf(u)+a} = dx$$

que es una ecuación de variables separables. Aplicando este método, resolvemos la ecuación pedida (queda propuesto al lector).

□

Problema 1.6. Resuelva explícitamente los problemas de Cauchy planteados y determine en cada caso el intervalo máximo de definición de la solución:

(a) $yy' = -x, \quad y(4) = 3$

(b) $y' + (\tan x)y = \cos^2 x, \quad y(0) = -1$

(c) $x^2y' = 4x^2 + 7xy + 2y^2, \quad (i)\ y(1) = -2 \ \wedge \ (ii)\ y(1) = 4$

Solución:

(a) La ecuación es de variables separadas:

$$yy' = -x \longrightarrow ydy = -xdx \longrightarrow y^2 = -x^2 + C \longrightarrow y = \pm\sqrt{C - x^2}$$

Ahora,

$$y(4) = 3 = \sqrt{C - 16} \longrightarrow C = 25$$

La solución del PVI es entonces $y = \sqrt{25 - x^2}$ con intervalo de solución $I = (-5, 5)$.

(b) La ecuación es lineal de primer orden. El intervalo más grande que contiene a $x = 0$, donde $\tan(x), \cos(x)$ son continuas es $I = (-\pi/2, \pi/2)$. Un factor integrante es:

$$\mu(x) = e^{\int \tan(x)\ dx} = e^{-\ln|\cos(x)|} = \frac{1}{\cos(x)}, \quad x \in I$$

Multiplicando la ecuación por μ se obtiene

$$\left(\frac{y}{\cos x}\right)' = \cos x \longrightarrow y = \sin(x)\cos(x) + C\cos(x)$$

$$y(0) = -1 = C \longrightarrow C = -1$$

$$\therefore\ y(x) = \sin(x)\cos(x) - \cos(x)$$

(c) La ecuación es homogénea. Con la sustitución $v = y/x$ se obtiene

$$v + xv' = 4 + 7v + 2v^2 \longrightarrow \frac{dv}{4 + 6v + 2v^2} = \frac{dx}{x} \longrightarrow \frac{dv}{2(v+1)} - \frac{dv}{2(v+2)} = \frac{dx}{x}$$

Así,

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{v+1}{v+2}\right| = \ln|x| + C_1 \longrightarrow v = -\frac{2Cx^2 - 1}{Cx^2 - 1}, \quad C = \pm e^{2C_1}$$

A lo anterior hay que agregar las soluciones especiales $v = -1, v = -2$. Como $v = y/x$ obtenemos que las soluciones de la ecuación son:

$$y = -2x \quad , \quad y = -x \quad , \quad y = -\frac{2Cx^3 - x}{Cx^2 - 1}$$

Para la condición inicial en (i) se obtiene la solución $y = -2x$ con intervalo de solución $\mathbb{R}$. Para la condición inicial en (ii) se obtiene la solución $y = -2\dfrac{5x^3 - 3x}{5x^2 - 6}$ con intervalo de solución $I = (-\sqrt{6/5}, \sqrt{6/5})$.

$\square$

Problema 1.7. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $y' = \dfrac{x^2+y^2}{xy}, \quad x \geq 1, \quad y(1) = 1$

(b) $xy' + y = x^4y^3$

Solución:

(a) La ecuación se puede escribir como:

$$y' = \frac{1 + y^2/x^2}{y/x}$$

luego claramente la ecuación es de tipo homogénea por lo que hacemos el cambio $z = y/x \to y = zx \leftrightarrow y' = z + xz'$. Reemplazando y despejando la ecuación queda:

$$z'x = \frac{3z^2+1}{z}$$

que es de separable, luego si separamos variables:

$$\int \frac{zdz}{3z^2+1} = \int \frac{dx}{x} \to \frac{1}{6}\ln|3z^2+1| = \ln|x| + C$$

Ordenando nos queda:

$$3z^2 + 1 = Ax^6 \to z = \pm\sqrt{Ax^6 - 1/3} \to y = \pm x\sqrt{Ax^6 - 1/3}$$

(b) Reescribimos la ecuación como:

$$y' + \frac{y}{x} = x^3y^3$$

que es una ecuación de Bernoulli con $\nu = 3$ por lo que hacemos el cambio

$$u = y^{1-3} = y^{-2} \to y = u^{-1/2} \to y' = \frac{-1}{2}u^{-3/2}u'$$

□

Reemplazando nos queda:

$$\frac{-1}{2}u^{-3/2}u' + \frac{u^{-1/2}}{x} = x^3u^{-3/2}$$

y multiplicando por $-2u^{3/2}$ la ecuación queda:

$$u' - \frac{2u}{x} = -2x^3$$

ecuación lineal que se resuelve utilizando factor integrante:

$$\mu = e^{\int P(x)dx} = e^{\int -2dx/x} = x^{-2}$$

luego la ecuación queda:

$$\mu \cdot u = -2\int \mu x^3 dx = -2\int x dx = -x^2 + C$$

Por lo tanto despejando:

$$u = -x^4 + Cx^2$$

y devolviendo el cambio:

$$y^{-2} = -x^4 + Cx^2 \longrightarrow y(x) = \frac{\pm 1}{\sqrt{-x^4 + Cx^2}}$$

□

Problema 1.8. Considere las siguientes interrogantes.

(a) Demuestre que la ecuación diferencial:

$$\frac{xy+1}{y}dx + \frac{2y-x}{y^2}dy$$

es exacta y resuélvala.

(b) Demuestre que la siguiente ecuación diferencial no es exacta:

$$\Big(e^x - \sin(y)\Big)dx + \cos(y)dy = 0$$

Y luego resuélvala, sabiendo que tiene un factor integrante que es solo función de x.

Solución:

(a) Sea $M = \frac{xy+1}{y}$ y $N = \frac{2y-x}{y^2}$. Notemos que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

y con ello la ecuación inicial es exacta y existe $F(x,y)$ tal que $F_x = M,\ F_y = N$. Así, utilizando la primera derivada parcial, obtenemos que:

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} + h(y) \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + h'(y)$$

Pero, por la segunda derivada parcial, debe satisfacerse que:

$$-\frac{x}{y^2} + h'(y) = \frac{2y-x}{y^2} \longrightarrow h'(y) = \frac{2}{y} \longrightarrow h(y) = 2\ln(y)$$

De modo tal que

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} + 2\ln(y)$$

y la solución general a la ecuación es:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} + 2\ln(y) = C$$

(b) Definimos $M = e^x - \sin(y), N = \cos(y)$. Claramente, notamos que:

$$M_y = -\cos(y) \neq N_x = 0$$

Supongamos que existe una función $\mu(x)$ tal que, al multiplicarla por la ecuación anterior, satisface la condición para ser exacta. Esto es:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\Big[M\mu(x)\Big] &= \frac{\partial}{\partial x}\Big[N\mu(x)\Big] \\
\mu(x)M_y &= \mu(x)N_x + \mu'(x)N \\
-\mu(x)\cos(y) &= \mu'(x)\cos(y) \\
-\mu(x) &= \mu'(x) \\
\mu(x) &= e^{-x}
\end{aligned}$$

Ahora, la ecuación inicial es exacta y procedemos a resolverla. Para ello, buscamos $F(x,y)$ tal que $F_x = M\mu(x), F_y = N\mu(x)$. Utilizando la derivada parcial con respecto a y obtenemos:

$$F(x,y) = \sin(y)e^{-x} + h(x) \quad \longrightarrow \quad F_x = -\sin(y)e^{-x} + h'(x)$$

y por tanto $h'(x) = 1 \longrightarrow h(x) = x$. De este modo, la ecuación diferencial queda como sigue:

$$\sin(y)e^{-x} + x = C$$

$\square$

Problema 1.9. Determine la forma general de la solución de:

$$y' + y = 3\cos(x)$$

Después verifique que, independiente de la condición inicial, la solución $y(x)$ tiende a una función periodica cuando $x \to \infty$.

Solución:

Una forma de obtener la solución general de la ecuación es observar que es una ecuación lineal del tipo:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Con $P(x) = 1$ y $Q(x) = 3\cos(x)$. Entonces el factor integrante es:

$$\rho(x) = e^{\int dx} = e^x$$

Entonces, por el método del factor integrante se tiene que:

$$\frac{d}{dx}(e^x y) = 3e^x\cos(x)$$

$$\Leftrightarrow e^x y = 3\int_0^x e^t\cos(t)dt + C$$

$$\Leftrightarrow y(x) = 3e^{-x}\int_0^x e^t\cos(t)dt + Ce^{-x}$$

Usando integración por partes dos veces o la fórmula polar $\cos(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$, se puede calcular la integral, llegando a:

$$y(x) = \frac{3}{2}(\cos(x) + \sin(x)) + Ae^{-x}$$

De donde para verificar que la función es periodica con periodo 2π, consideramos el límite:

$$\begin{gathered}\lim_{x\to\infty} y(x+2\pi) - y(x) \\ = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{2}(\cos(x+2\pi) + \sin(x+2\pi)) + Ae^{-(x+2\pi)} - \frac{3}{2}(\cos(x) + \sin(x)) + Ae^{-x} \\ = \lim_{x\to\infty} Ae^{-x}(e^{-2\pi} - 1) = 0\end{gathered}$$

□

1.2. Resolución de Modelos

Problema 1.10. La difusión de una epidemia es modelada por la ecuación logística:

$$\frac{dx}{dt} = kx(m - x)$$

donde $k > 0$, la población total del pueblo es m y $x(t)$ representa la cantidad de infectados pasados t días. Para $t = 0$ un décimo de la población esta infectada. Después de 5 días, un quinto de la población esta infectada.

(a) ¿Qué proporción de la población esta infectada luego de 10 días?

(b) ¿Para que valor de t la mitad de la población esta infectada?

(c) Encuentre el valor asintótico x_∞ que ocurre para tiempo infinito, es decir: $x_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} x(t)$

(d) ¿Qué desventajas tiene el modelo?

Solución: Resolvamos la ecuación diferencial. Claramente es separable:

$$\frac{dx}{x(m-x)} = kdt \longrightarrow \frac{1}{m}\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{m-x}\right) dx = \int kdt \longrightarrow \ln x - \ln(m-x) = kmt + C$$

Despejando tenemos:

$$\ln\left(\frac{x}{m-x}\right) = kmt + C \longrightarrow \frac{x}{m-x} = Ae^{kmt}$$

Luego:

$$x(t) = \frac{Ame^{kmt}}{1 + Ae^{kmt}} = \frac{Am}{A + e^{-kmt}}$$

De los datos iniciales tenemos:

$$x(0) = \frac{Am}{A+1} = \frac{m}{10} \longrightarrow A = \frac{1}{9}$$

Además tenemos:

$$x(5) = \frac{Am}{A + e^{-km5}} = \frac{m}{5} \longrightarrow \frac{5}{9} = \frac{1}{9} + e^{-km5} \longrightarrow k = \frac{1}{5m}\ln\left(\frac{9}{4}\right)$$

(a) Así la población infectada en 10 días:

$$x(10) = \frac{m/9}{1/9 + e^{-km10}} = \frac{m/9}{1/9 + e^{-2\ln(9/4)}} = \frac{m/9}{1/9 + (4/9)^2}$$

Luego:

$$x(10) = \frac{9m}{25}$$

□

(b) Debemos resolver:

$$x(t) = \frac{m}{2} = \frac{m/9}{1/9 + e^{-kmt}} \longrightarrow \frac{1}{9} = e^{-kmt} \longrightarrow \ln 9 = kmt$$

Así:

$$t = \frac{1}{km}\ln 9 = \frac{5\ln 9}{\ln(4/9)} \approx 13{,}548$$

$\square$

(c)

$$x_\infty = \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{Am}{A + e^{-kmt}} = \frac{Am}{A} = m$$

Es decir se enferma toda la población.

$\square$

(d) Una debilidad que tiene el modelo es que toma tiempo infinito para que se enferme la última persona. Esto se debe a que se esta modelando una situación discreta por medio de un modelo continuo.

$\square$

Problema 1.11. El movimiento unidimensional $x(t)$ de un cuerpo sujeto a una fuerza de roce proporcional a su velocidad y a una fuerza constante F_c satisface la ecuación diferencial:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt} + F_c$$

Mediante un cambio de variables apropiado, transforme esta ecuación en una de variables separables. Luego, determine la velocidad límite del cuerpo y obtenga la solución para $x(t)$ dado que parte desde el origen con una velocidad inicial v_0.

Solución: Sea $v = \frac{dx}{dt}$. Así, reducimos la ecuación original a una de primer orden:

$$m\frac{dv}{dt} = -k\left(v - \frac{F_c}{k}\right)$$

Se propone el siguiente cambio de variable: $u = v - \frac{F_c}{k}$, $\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt}$. Así, reemplazamos y resolvemos:

$$\begin{aligned}
m\frac{du}{dt} &= -ku \\
\frac{du}{u} &= -\frac{k}{m}dt \\
\ln|u| &= -\frac{k}{m}t + C \\
u &= \pm e^C e^{-kt/m} \\
u &= Ae^{-kt/m}
\end{aligned}$$

Donde $A = \pm e^C$, es una constante que depende de las condiciones iniciales. Reemplazando el valor de u,

$$v(t) = Ae^{-kt/m} + \frac{F_c}{k}$$

De lo anterior se resuelve inmediatamente que la velocidad límite del cuerpo es:

$$v_{lim} = \lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{F_c}{k}$$

Utilizando la velocidad inicial v_0 es posible determinar el valor de la constante A:

$$v(0) = v_0 = A + \frac{F_c}{k} \quad \longrightarrow \quad A = v_0 - \frac{F_c}{k}$$

La expresión para la velocidad queda como:

$$v(t) = \left(v_0 - \frac{F_c}{k}\right) e^{-kt/m} + \frac{F_c}{k}$$

Integrando este resultado se obtiene la posición del cuerpo en función del tiempo:

$$x(t) = \frac{m}{k}\left(\frac{F_c}{k} - v_0\right) e^{-kt/m} + \frac{F_c}{k}t + B$$

El valor de la constante B la determinamos reemplazando la segunda condición inicial:

$$x(0) = 0 = \frac{m}{k}\left(\frac{F_c}{k} - v_0\right) + B \;\longrightarrow\; B = -\frac{m}{k}\left(\frac{F_c}{k} - v_0\right)$$

Finalmente,

$$x(t) = \frac{m}{k}\left(\frac{F_c}{k} - v_0\right)\left(e^{-kt/m} - 1\right) + \frac{F_c}{k}t$$

□

Problema 1.12. Suponga que un lago de volumen $V = 10\ km^3$ tiene contaminantes A y B disueltos uniformemente en cantidades iniciales de 1 y 7 toneladas respectivamente. Agua contaminada con una concentración de 1 ton/km^3 de A ingresa a una tasa constante de 6 $km^3/año$. Además, ingresan directamente 1 $ton/año$ del contaminante A y 2 $ton/año$ del contaminante B. Suponga que agua perfectamente mezclada sale del lago a una tasa de 6 $km^3/año$. Determine y grafique las cantidades de A y B con respecto al tiempo, indicando sus valores asintóticos. ¿En qué instante son iguales?

Solución: Sean

$A(t)$: cantidad del contaminante A en el instante t, en toneladas.
$B(t)$: cantidad del contaminante B en el instante t, en toneladas.

Para una cantidad Δx de producto (ya sea A, B), se cumple que:

$$\Delta x = \{\text{toneladas que entran}\} - \{\text{toneladas que salen}\} = r_{in}c_{in}\Delta t - r_{out}c_{out}\Delta t$$

con r, c las tasas de entrada o salida y concentraciones de entrada o salida respectivamente. Así, las ecuaciones diferenciales de los contaminates son:

$$A'(t) = 1 \,\left[\frac{ton}{km^3}\right] \cdot 6 \,\left[\frac{km^3}{año}\right] + 1 \,\left[\frac{ton}{año}\right] - \frac{6}{10}A(t) \;, \quad A(0) = 1 \; ton$$

$$B'(t) = 2 \,\left[\frac{ton}{año}\right] - \frac{6}{10}B(t) \;, \quad B(0) = 7 \; ton$$

Resolviendo, tenemos que:

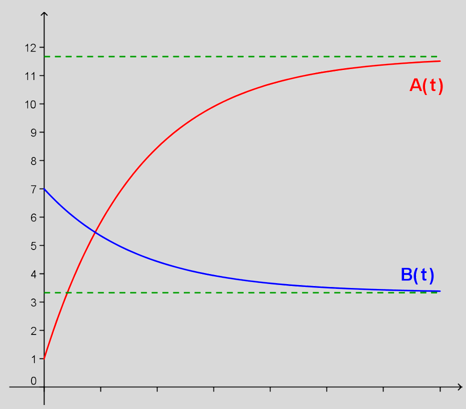
$$A(t) = \frac{35}{3} - \frac{32}{3}e^{-3t/5} \quad \wedge \quad B(t) = \frac{10}{3} + \frac{11}{3}e^{-3t/5}$$

Los valores asintóticos se calculan cuando $t \to \infty$:

$$A_{lim} = \frac{35}{3} \; ton \quad \wedge \quad B_{lim} = \frac{10}{3} \; ton$$

Ambas cantidades son iguales cuando:

$$A(t) = B(t) \longrightarrow t^* = -\frac{5}{3}\ln\left(\frac{25}{43}\right) \; s \approx 0{,}9 \; s$$



□

Problema 1.13. En un estanque de 144 litros ingresan 6 litros/seg de salmuera con una concentración de sal de 3 grs/litro. Desde el estanque salen 2 litros/seg de solución homogénea.

(a) Si inicialmente en el estanque hay 100 litros de agua pura, determine la cantidad de sal en el estanque en el instante en que éste se llena.

(b) Suponiendo que a partir del momento en que el estanque se llena, el exceso de solución (homogénea) se rebalsa, determine el valor límite de la concentración de sal en el estanque cuando t tiende a infinito.

Solución:

(a) Sea $y(t)$ la cantidad de sal en el estanque, entonces su ecuación diferencial esta dada:

$$\text{La variación de sal} \ = \ \text{Lo que entra} \ - \ \text{Lo que sale}$$

es decir:

$$\frac{dy}{dt} = \text{Flujo}_e(t) \cdot \text{Concentración}_e(t) - \text{Flujo}_s(t) \cdot \text{Concentración}_s(t)$$

que si nos fijamos tenemos las unidades de flujo $\frac{[lt]}{[min]}$ y las unidades de concentración $\frac{[gr]}{[lt]}$, con lo que su multiplicación deja $\frac{[gr]}{[min]}$, así para este caso:

$$y' = 6 \cdot 3 - 2\frac{y}{100+4t} \ \longrightarrow \ y' + 2\frac{y}{100+4t} = 18$$

Se resuelve usando factor integrante: $\mu = e^{\int \frac{2}{100+4t}dt} = e^{\ln(t+25)^{1/2}} = \sqrt{t+25}$ Luego:

$$y \cdot \mu = \int 18\sqrt{t+25}dt = 12(t+25)^{3/2} + C$$

Así, despejando:

$$y(t) = C(t+25)^{-1/2} + 12(t+25)$$

ahora utilizando $y(0) = 0$ tenemos:

$$0 = C(25)^{-1/2} + 12 \cdot 25 \to C = -12 \cdot 25 \cdot 5 = -1500$$

Luego:

$$y(t) = 12t + 300 - 1500(t+25)^{-1/2}$$

Notemos que el tanque se llena a los 11s. Así:

$$y(11) = 432 - \frac{125}{3}\sqrt{36} = 182$$

□

(b) Una vez que termina empieza a rebalsarse y mantiene su volumen constante, es decir entran 6 litros y salen 6. Luego, la nueva ecuación esta dada por:

$$y' = 18 - \frac{6}{144}y \ \longrightarrow \ y' + \frac{1}{24}y = 18$$

Su solución esta dada por:

$$y' = 432 + Ce^{-t/24}$$

Tenemos la condición inicial $y(0) = 182$ pero da lo mismo, pues queremos:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{\text{Volumen}} = \lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{144} = \frac{432}{144} = 3$$

□

Problema 1.14. Un pote de agua a 50^oC es sacado al exterior donde la temperatura es de 20^oC. El agua se enfría de acuerdo a la ley de enfriamiento de Newton (esto es, la rapidez de cambio de su temperatura es proporcional a la diferencia entre ésta y la temperatura ambiente) con constante de proporcionalidad $k = 1/10$ cuando el tiempo es medido en horas. Si la temperatura exterior desciende a razón de 1,5°C por hora, ¿cuál es la temperatura del agua después de 5 horas?

Solución: Sean $x(t)$ e $Y(t)$ las temperaturas del agua y del exterior (en °C), t horas después de iniciado el experimento. Entonces, por hipótesis,

$$x'(t) = \frac{1}{10}\Big(Y(t) - x(t)\Big)$$

Por otro lado, $Y(t)$ satisface $Y(0) = 20$ e $Y'(t) = -3/2$. Luego,

$$Y(t) = 20 - \frac{3}{2}t$$

y así, sustituyendo, hallamos que la ecuación diferencial para la temperatura $x(t)$ del agua es

$$x' + \frac{1}{10}x = 2 - \frac{3t}{20}$$

que es lineal. Utilizando el factor integrante, resolvemos:

$$x(t) = e^{-t/10}\left(\int \left(2 - \frac{3t}{20}\right) e^{t/10} dt + C\right)$$

o bien

$$x(t) = 35 - \frac{3t}{2} + Ce^{-t/10}$$

Sustituyendo la condición inicial $x(0) = 50$ concluimos que $C = 15$ y, por tanto la temperatura del agua después de t horas vienen dada por

$$x(t) = 35 - \frac{3t}{2} + 15e^{-t/10}$$

Por tanto, después de 5 horas la temperatura es

$$x(5) = \frac{55}{2} + 15e^{-1/2} \approx 36,6°C$$

□

Problema 1.15. Un conejo parte del origen y corre por el eje y positivo con velocidad a. Al mismo tiempo, un perro que corre con rapidez b sale del punto $(c, 0)$ y persigue al conejo. El propósito de este problema es determinar la trayectoria $y(x)$ que sigue el perro.

(a) Dado un instante t cualquiera, el conejo se encontrará en la posición $C = (0, at)$ del plano xy, y llamamos $P = (x, y)$ a las coordenadas de la posición del perro. Observando que el trazo PC es tangente a la trayectoria buscada, obtenga la ecuación diferencial que satisface $y(x)$.

(b) Derivando la expresión anterior con respecto a x pruebe que se tiene:

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = -a\frac{dt}{dx}$$

(c) Para calcular dt/dx en la ecuación anterior, comience por obtener el valor de la derivada ds/dx de la longitud s del arco de curva descrito por $y(x)$. Para esto recuerde que

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

y que s crece si x decrece en nuestro caso.

(d) Continuando con el cálculo de dx/dt, observe que ds/dt representa la velocidad del perro que es constante (b) y conocida según los datos del problema. Usando este hecho y el valor de ds/dx, calcule dt/dx.

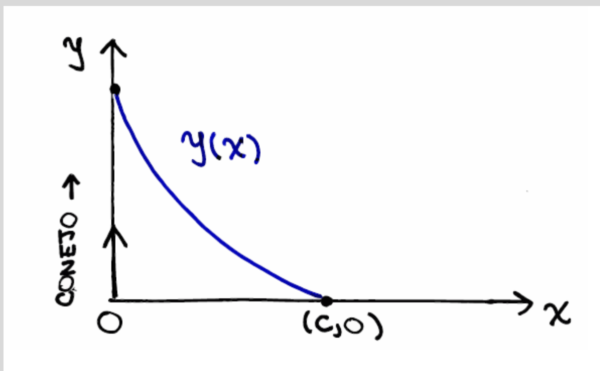
(e) Demuestre entonces que la ecuación buscada de la curva es:

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a}{b}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

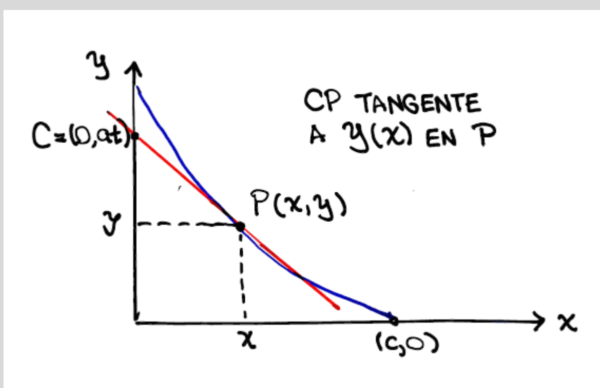
(f) Mediante la sustitución $p = dy/dx$, obtendrá una ecuación de primer orden en p. Resuelva dicha ecuación.

Solución:

(a) La trayectoria del perro será algo como se muestra en la siguiente figura:



En todo instante el perro se mueve en la dirección de la recta que une su posición con la posición del conejo. Dado que la posición de ambos varía de forma continua en el tiempo, la trayectoria debe tener una forma similar a la siguiente:



Basta escribir la ecuación de la tangente:

$$\frac{y-at}{x} = \frac{dy}{dx}$$

de donde se tiene:

$$x\frac{dy}{dx} = y - at$$

$\square$

(b) La derivación con respecto a x de la expresión anterior nos deja:

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} - a\frac{dt}{dx}$$

Y por ende:

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = -a\frac{dt}{dx}$$

$\square$

(c) Se tiene que:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds}\frac{ds}{dx}$$

Usando la expresión de ds^2 se obtiene:

$$\frac{ds}{dx} = -\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$\square$

(d) Se sabe además que:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{b}$$

y usando lo de la pregunta anterior:

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{b}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$\square$

(e) Reemplazando en la ecuación de la parte c) se tiene:

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a}{b}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$\square$

(f) Si ponemos $p = dy/dx$ nos queda:

$$xp' = \frac{a}{b}\sqrt{1 + p^2}$$

Notemos que es de variables separables por lo que:

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{a}{bx}$$

Si integramos y recordamos que

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \text{Arcsinh}(p)$$

nos queda:

$$\text{Arcsinh}(p) = \frac{a}{b}\ln(x) + C$$

Si ponemos $k = a/b$ y aplicamos sinh a ambos lados nos queda:

$$p = \sinh(k\ln x + C) = \frac{1}{2}\left(e^{k\ln x + C} - e^{-(k\ln x + C)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^C \cdot x^k - \frac{x^{-k}}{e^C}\right)$$

Es decir si ponemos $e^C = C_1$ nos queda:

$$p = \frac{C_1}{2}x^k - \frac{1}{2C_1}x^{-k}$$

Integrando llegamos a la posición si $k \neq 1$:

$$y(x) = \frac{C_1}{2(k+1)}x^{k+1} - \frac{1}{2C_1(1-k)}x^{1-k} + C_2$$

Usando las condiciones $y(c) = 0$ que es la posición inicial y $\frac{dy(c)}{dx} = 0$ pues su pendiente apunta horizontalmente, podemos encontrar los valores de C_1 y C_2.

□

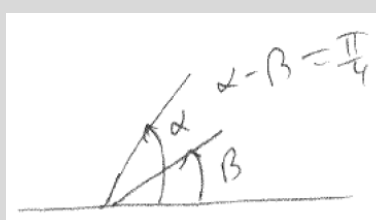
Problema 1.16. Determine la ecuación diferencial para la familia de curvas $y = Ce^x, C \in \mathbb{R}$ y determine una familia de curvas que la corte en un ángulo de $\pi/4$ radianes.

Solución: La ecuación diferencial viene dada por:

$$\frac{y}{e^x} = C \longrightarrow \frac{y'}{e^x} - \frac{y}{e^x} = 0 \longrightarrow y' = y$$

En un punto (x, y):

- La pendiente de la recta tangente a $y = Ce^x$ es $m_1 = y' = y = \tan\beta$
- La pendiente de la recta tangente que la corta en $\pi/4$ es $m_2 = y' = \tan\alpha$



Existen dos posibilidades, $\alpha - \beta = \pi/4$ o $\alpha - \beta = -\pi/4$.

Caso 1:

$$1 = \tan(\pi/4) = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{y' - y}{1 + yy'} \longleftrightarrow y' = \frac{1+y}{1-y}$$

Resolvemos mediante separación de variables,

$$\ln{(1+y)^2} - y = x + C$$

<u>Caso 2:</u>

$$-1 = \tan{(-\pi/4)} = \tan{(\alpha-\beta)} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{y'-y}{1+yy'} \longleftrightarrow y' = \frac{y-1}{1+y}$$

Resolvemos,

$$\ln{(y-1)^2} + y = x + C$$

□

1.3. Teorema de Picard-Lindelöf (o de existencia y unicidad)

Problema 1.17. Exhiba 2 soluciones distintas del PVI

$$x' = t^{1/3}(x-1)^{1/3} \qquad , \qquad x(0) = 1$$

Explique porque ello no contradice el Teorema de Picard-Lindelöf.

Solución: Lo primero es notar que $x(t) \equiv 1$ es solución y cumple la condición inicial. Para la otra resolvemos la ecuación usando variables separadas:

$$\int \frac{dx}{(x-1)^{1/3}} = \int t^{1/3}dt \longrightarrow \frac{3}{2}(x-1)^{2/3} = \frac{3}{4}t^{4/3} + C$$

Usando la condición inicial tenemos $C = 0$ y así:

$$x(t) = 1 + \frac{t^2}{2\sqrt{2}}$$

Esto no contradice el teorema de existencia y unicidad (TEU) pues a pesar de que $f(x,t) = t^{1/3}(x-1)^{1/3}$ es continua, pero dado que la derivada

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{t^{1/3}}{3(x-1)^{2/3}}$$

no es continua en $x = 1$ no podemos asegurar la unicidad.

$\square$

Problema 1.18. Determine los valores de (a,b) tal que el problema de valor inicial satisfaga lo pedido.

(a) $xy' + 2y = 0, \quad y(a) = b$ no tiene solución.

(b) $(x-1)y' = (y-1)(y-2), \quad y(a) = b$ tiene solución. Indique cuando la solución no es única y determine todas las soluciones en ese caso.

(c) $(x-1)y' = (y-1)(y-2), \quad y(a) = b$ no tiene solución.

Solución:

(a) La ecuación puede escribirse como $y' = -\frac{2y}{x}, x \neq 0$. En este caso $f(x,y) = -\frac{2y}{x}$ es continua en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$. Entonces, el PVI tiene solución para $a \neq 0$ y los candidatos (a,b) para la no existencia de soluciones son de la forma $(0,b)$.

$$\frac{y'}{y} = -\frac{2}{x} \longrightarrow \ln|y| = -2\ln|x| + C \longrightarrow y = \frac{C_1}{x^2}$$

Debemos considerar, además, la solución especial $y = 0$.

Para $(a,b) = (0,0)$ hay una solución de la forma $y \equiv 0$. Para $(a,b) = (0,b)$ con $b \neq 0$, no hay soluciones.

(b) Primero que todo, resolvemos la ecuación. Separando variables,

$$\frac{dy}{(y-1)(y-2)} = \frac{dx}{x-1} \longrightarrow \frac{dy}{y-2} - \frac{dy}{y-1} = \frac{dx}{x-1} \longrightarrow \ln\left|\frac{y-2}{y-1}\right| = \ln|x-1| + C_0$$

Así,

$$\left|\frac{y-2}{y-1}\right| = e^{C_0}|x-1| \longrightarrow y = \frac{-2+Cx-C}{Cx-C-1}, \quad C = \pm e^{C_0}$$

Debemos considerar también las soluciones especiales $y = 1, y = 2$. Notemos que $y = 2$ se obtiene tomando $C = 0$. Por otra parte, $y(1) = 2$ para todas las soluciones, excepto para $y \equiv 1$.

La función $f(x,y) = \dfrac{(y-1)(y-2)}{x-1}$ es continua para $x \neq 1$. Por lo tanto para cada (a,b) con $a \neq 1$ el PVI $y(a) = b$ tiene al menos una solución. En los puntos donde $f_y = \dfrac{2y-3}{x-1}$ es continua la solución es única.

Por lo tanto, $y(a) = b$ con $a \neq 1$ tiene solución y es única. El problema de valor inicial $y(1) = 2$ no tiene solución única. Cada una de las funciones $y = \dfrac{-2+Cx-C}{Cx-C-1}$ e $y = 2$ son soluciones del PVI. Por otro lado si $a = 1$ y $b = 1$ se tiene la solución única $y \equiv 1$, y si $a = 1$ y $b \neq 1$ o 2 no tiene solución.

> ***Observación:*** La continuidad de f_y es condición suficiente pero no necesaria para la unicidad; los puntos donde f_y no es continua solo son candidatos a no unicidad. Para demostrar la no unicidad se deben mostrar dos o más soluciones.

(c) Los valores de (a,b) para los cuales el PVI no tiene solución son $a = 1, b \neq 1, 2$. Esto se debe a que todas las expresiones que definen las soluciones de la ecuación diferencial cumplen $y(1) = 2$ o bien $y(1) = 1$.

> ***Observación:*** La continuidad de f es condición suficiente pero no necesaria para la existencia; los puntos donde f no es continua solo son candidatos a no existencia. Para demostrar la no existencia se debe verificar que ninguna solución cumple las condiciones iniciales.

$\square$

Problema 1.19. Considere el siguiente problema de valor inicial (PVI)

$$y' = t\sqrt{1-y}, \quad y(0) = 1/2$$

(a) Utilizando el teorema de Picard-Lindelöf, demuestre que el PVI tiene única solución definida en algún intervalo abierto que contiene el punto $t = 0$.

(b) Resuelva explícitamente el PVI.

(c) Encuentre el intervalo maximal para el PVI antes expuesto.

Solución:

(a) Puesto que $f(t,y) = t\sqrt{1-y}$, $f_y(t,y) = \dfrac{-t}{2\sqrt{1-y}}$ son continuas en la región abierta $D = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 1\}$, y como $(0, 1/2) \in D$, por el teorema de Picard-Lindelöf el PVI tiene una única solución en algún intervalo abierto que contiene a $t = 0$.

(b) Resolvemos por separación de variables:

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y}} = tdt \longrightarrow -2\sqrt{1-y} = \frac{t^2}{2} + C$$

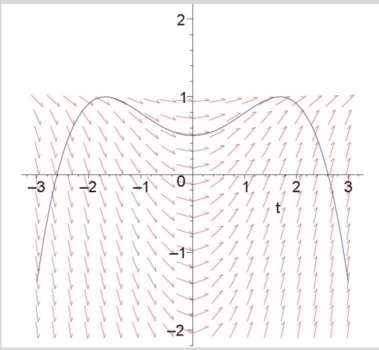
Como $-2\sqrt{1-y} \leq 0$ para $y < 1$, tenemos que la solución obtenida está restringida a $\frac{t^2}{2} + C \leq 0$. Para la condición inicial $y(0) = 1/2$ tenemos que $C = -2\sqrt{1/2}$. La restricción en el dominio queda entonces como:

$$\tilde{D} = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 1,\ -2^{3/4} \leq t \leq 2^{3/4}\}$$

Finalmente,

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{t^4}{16} + \frac{\sqrt{2}}{4}t^2, \quad -2^{3/4} \leq t \leq 2^{3/4}$$

(c) El gráfico de $y(t)$ y del campo de direcciones de la EDO es:



La función encontrada es solución solamente en el intervalo $[-2^{3/4}, 2^{3/4}]$, pues fuera de él la función no es tangente al campo de direcciones. Notemos que:

$$\lim_{x \to -2^{3/4}} y(t) = 1 \qquad \wedge \qquad \lim_{x \to 2^{3/4}} y(t) = 1$$

Así, la función

$$z(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t < -2^{3/4} \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{t^4}{16} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}t^2 & \text{para } -2^{3/4} \leq t \leq 2^{3/4} \\ 1 & \text{para } t > 2^{3/4} \end{cases}$$

es una extensión de $y(t)$ que satisface la EDO inicial. Con ello, $(-2^{3/4}, 2^{3/4})$ no es un intervalo maximal de existencia; dada la existencia de $z(t)$, el intervalo en cuestión es simplemente $I = (-\infty, \infty)$.

□

Problema 1.20. Considere el siguiente problema de valores iniciales

$$y' = \frac{\sqrt{1+y}}{1+x^2} \quad ; \quad y(a) = b$$

(a) Encuentre todos los valores $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales el **PVI** no tiene solución.

(b) Encuentre todos los valores $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales el **PVI** tiene solución única, determinela.

(c) Encuentre todos los valores $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales el **PVI** tiene más de una solución, determinelas.

Solución:

Sea $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{1+y}}{1+x^2}$.

(a) Notamos que la EDO solo está definida para $y \geq 1$, entonces no hay solución del PVI si $b < -1$ y $a \in \mathbb{R}$. □

(b) La función $f(x, y)$ es continua en $R = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y > -1\}$ y además

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{1+y}}$$

es continua en R.
Entonces el teorema de Picard-Lindelöf garantiza la existencia y unicidad de la solución si $b > -1$ y $a \in \mathbb{R}$.
Para resolver la EDO, notamos que esta es de variables separables, entonces:

$$\frac{1}{\sqrt{1+y}} y' = \frac{1}{1+x^2}$$

Integrando:

$$2\sqrt{1+y} = \arctan(x) + C$$

Despejando $y(x)$:

$$y(x) = -1 + \left(\frac{\arctan(x)}{2} + C \right)^2$$

Y tomando la condición inicial, se tiene que la única solución del PVI para $b < -1$ y $a \in \mathbb{R}$ es:

$$y(x) = -1 + \left(\frac{\arctan(x)}{2} + 2\sqrt{1+b} - \arctan(a) \right)^2$$

□

(c) Ahora bien, si $b = -1$, el teorema de existencia y unicidad no aplica, entonces el PVI tiene más de una solución, por ejemplo:

$$y(x) = -1 \quad o \quad y(x) = -1 + \left(\frac{\arctan(x)}{2} - \arctan(a) \right)^2$$

Problema 1.21. Considere la ecuación diferencial $y' = f(y)$ donde $f : J \to \mathbb{R}$ es clase $\mathscr{C}^1$. Sea $y_0 \in J$.

(a) Verifique que la función constante $y(x) = y_0$ es solución (sobre $\mathbb{R}$) si y solo si $f(y_0) = 0$.

(b) Suponga que $f(y_0) \neq 0$. Sea y la solución del problema de Cauchy $(y' = f(y), y(x_0) = y_0)$ e I el intervalo maximal de solución. Mostrar que $\forall x \in I, f(y(x)) \neq 0$. Deduzca que $\forall x \in I$ se tiene

$$x - x_0 = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{du}{f(u)}.$$

Solución:

(a) En efecto, la función $y(x) = y_0$ tiene derivada nula, de donde se sigue que es solución de la ecuación diferencial si y sólo si $f(y_0) = 0$. $\square$

(b) Demostremos lo pedido por contradicción. Supongamos que existe $x_1 \in I$ tal que $f(y(x_1)) = 0$. La función y es entonces solución del problema de Cauchy en el punto $(x_1, y(x_1))$. Además la función constante igual a $y(x_1)$ también es solución de este problema. Pero f posee derivadas parciales continuas, por lo que la solución al problema de Cauchy es única y las funciones deben coincidir sobre I. En particular, en x_0 se tiene

$$y(x_0) = y_0 = y(x_1),$$

de donde $f(y_0) = 0$ lo cual es una contradicción.

Uno puede entonces dividir por $f(y(x))$. Así, $\forall x \in I$ se tiene

$$\frac{y'(x)}{f(y(x))} = 1.$$

Integrando esta relación entre x_0 y x se obtiene

$$x - x_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{y'(x)}{f(y(x))}\, dx$$

y con el cambio de variable $u = y(x)$ se obtiene lo pedido. $\square$

1.4. Análisis Cualitativo

Problema 1.22. Encuentre los puntos de equilibrio y clasifiquelos para:

$$\frac{dy}{dx} = 5(3+y)(y^2 - 6y + 8)$$

Solución: Recordemos que en una ecuación autónoma $y' = f(y)$ los puntos de equilibrio serán aquellos a donde $f(a) = 0$ y por ende $y(x) \equiv a$ será una solución.

Luego recordemos que a puede ser :

(a) **Atractor:** Para este se cumple en una vecindad pequeña cerca del punto que para

$$y < a \text{ tenemos que } y' = f(y) > 0$$

y si

$$y > a \text{ tenemos que } y' = f(y) < 0$$

es decir siempre nos acercamos al punto, pues bajo a la función $y(x)$ es creciente y sobre a la función $y(x)$ es decreciente, así tenemos el criterio que $f'(a) < 0$. En este caso se cumplirá el sistema tiende asintóticamente al punto si es perturbado levemente en su vecindad, por lo que $\lim_{x \to \infty} y(x) = a$.

(b) **Repulsor:** Para este se cumple en una vecindad pequeña cerca del punto que para

$$y < a \text{ tenemos que } y' = f(y) < 0$$

y si

$$y > a \text{ tenemos que } y' = f(y) > 0$$

es decir siempre nos alejamos del punto, pues bajo a la función $y(x)$ es decreciente y sobre a la función $y(x)$ es creciente, así tenemos el criterio que $f'(a) > 0$. En este caso se cumplirá el sistema no tiende asintóticamente al punto si es perturbado levemente en su vecindad, por lo que $\lim_{x \to \infty} y(x) \neq a$.

(c) **Mixto o nodo:** Pues es el caso en que no ocurre lo anterior y puede que por algún sector se acerque y por el otro se aleje.

Los puntos de equilibrio se denominan **estables** si son **atractores** y en caso contrario (**repulsores o mixtos**) son **inestables**.

Así en este problema para obtener los puntos solo basta notar que

$$y' = f(y) = 5(3+y)(y-2)(y-4)$$

Por lo que $y_1 = -3,\ y_2 = 2$ y $y_3 = 4$. Luego para clasificarlos:

$$\begin{array}{ccc} y < -3 & \longrightarrow & y' < 0 \\ -3 < y < 2 & \longrightarrow & y' > 0 \\ 2 < y < 4 & \longrightarrow & y' < 0 \\ 4 < y & \longrightarrow & y' > 0 \end{array}$$

De aquí es fácil notar que y_1 es repulsor, y_2 es atractor y y_3 es repulsor. □

Problema 1.23. Para la ecuación diferencial $y' = (y-1)\sin(y^2)$

(a) Determine y clasifique sus puntos de equilibrio.

(b) Para $y(t)$ solución de la EDO, con $y(0) = a$, dependiendo del valor de a, con $-2 < a < 2$, determine $L_1 = \lim\limits_{t\to\infty} y(t)$, $L_2 = \lim\limits_{t\to-\infty} y(t)$

Solución:

(a) Recordar que en general cuando se tiene el problema

$$y' = f(y),$$

los puntos de equilibrio son aquellos y para los cuales $f(y) = 0$. En este caso debemos resolver

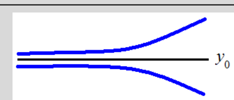
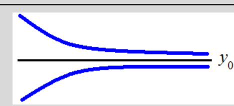
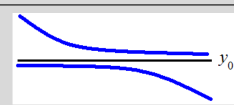
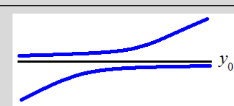
$$(y-1)\sin(y^2) = 0.$$

Claramente un punto de equilibrio es $\widetilde{y} = 1$. Los otros serán solución de la ecuación $\sin(y^2) = 0$, así que tenemos

$$y_k^2 = k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}).$$

Por lo tanto los puntos de equilibrio son $\widetilde{y} = 1, y_0 = 0, {y_1}^{\pm} = \pm\sqrt{\pi}, {y_2}^{\pm} = \pm\sqrt{2\pi}, \ldots, {y_k}^{\pm} = \pm\sqrt{k\pi}, \ldots$

Para clasificar estos puntos nos fijaremos en como cambia el signo de $f(y)$, de acuerdo a la siguiente tabla:

	Signo de $f(y)$		
	$y_0 - \varepsilon < y < y_0$	$y_0 < y < y_0 + \varepsilon$	
Fuente	$-$	$+$	
Sumidero	$+$	$-$	
Nodo	$-$	$-$	
Nodo	$+$	$+$	

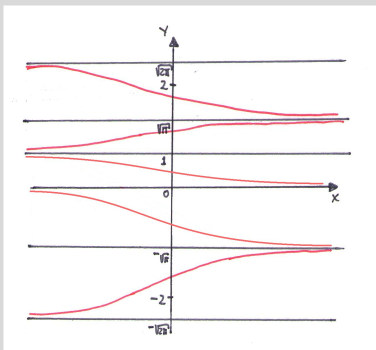
- Cuando nos acercamos a $y_0 = 0$ por la izquierda (valores de y menores que y_0) $f(y) = (y-1)\sin(y^2)$ tiene signo negativo al igual que cuando nos acercamos por la derecha (por valores de y mayores que y_0), por lo tanto este equilibrio es semiestable.
- Cuando nos acercamos a $\widetilde{y} = 1$ por la izquierda $f(y) =$ tiene signo negativo, mientras que cuando nos acercamos por la derecha $f(y)$ tiene signo positivo, por lo tanto este corresponde a un equilibrio inestable.

- Cuando nos acercamos a ${y_1}^+ = \sqrt{\pi}$ por la izquierda $f(y)$ tiene signo positivo, mientras que cuando nos acercamos por la derecha $f(y)$ tiene signo negativo, por lo tanto este corresponde a un equilibrio estable.
- Ahora cuando nos acercamos a ${y_2}^+ = \sqrt{2\pi}$ por la izquierda $f(y)$ tiene signo negativo, mientras que cuando nos acercamos por la derecha $f(y)$ tiene signo positivo, por lo tanto este corresponde a un equilibrio inestable.
- Por otro lado, cuando nos acercamos a ${y_1}^- = -\sqrt{\pi}$ por la izquierda $f(y)$ tiene signo positivo, mientras que cuando nos acercamos por la derecha $f(y)$ tiene signo negativo, por lo tanto este corresponde a un equilibrio estable.
- Y cuando nos acercamos a ${y_2}^- = -\sqrt{2\pi}$ por la izquierda $f(y)$ tiene signo negativo, mientras que cuando nos acercamos por la derecha $f(y)$ tiene signo positivo, por lo tanto este corresponde a un equilibrio inestable.

Observamos como se alternan los signos y podemos generalizar:

- Si $k > 0$ es par, entonces ${y_k}^\pm$ son equilibrios inestables.
- Si $k > 0$ es impar, entonces ${y_k}^\pm$ son equilibrios estables.

(b) Resulta útil realizar un diagrama utilizando la información obtenida en el inciso (a). El gráfico es como sigue:



- Si $-2 < a < -\sqrt{\pi}$, entonces $L_1 = -\sqrt{\pi}$ y $L_2 = -\sqrt{2\pi}$.
- Si $a = -\sqrt{\pi}$, entonces $L_1 = L_2 = -\sqrt{\pi}$.
- Si $-\sqrt{\pi} < a < 0$, entonces $L_1 = -\sqrt{\pi}$ y $L_2 = 0$.
- Si $0 < a < 1$, entonces $L_1 = 0$ y $L_2 = 1$.
- Si $a = 0$ entonces $L_1 = L_2 = 0$.
- Si $1 < a < \sqrt{\pi}$, entonces $L_1 = \sqrt{\pi}$ y $L_2 = 1$.
- Si $a = \sqrt{\pi}$, entonces $L_1 = L_2 = \sqrt{\pi}$.
- Finalmente si $\sqrt{\pi} < a < 2$, entonces $L_1 = \sqrt{\pi}$ y $L_2 = \sqrt{2\pi}$.

Problema 1.24. Dada la ecuación autónoma

$$y' = (y^3 - 2y^2 - y + 2)\ln(1 + y^2)$$

determine todos los puntos de equilibrio y clasifíquelos (nodo, fuente, sumidero).

Solución:

Sea $f(y) = (y^3 - 2y^2 - y + 2)\ln(1 + y^2)$, entonces los puntos de equilibrio son todas las soluciones de la ecuación $f(y) = 0$, los cuales son:

$$y_1 = -1 \qquad ; \qquad y_2 = 0 \qquad ; \qquad y_3 = 1 \qquad ; \qquad y_4 = 2$$

Como se tiene que $f(y) > 0$ si $y \in (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (2, +\infty)$, se concluye que y_1 e y_4 son fuentes, y_2 es nodo y por último y_3 es sumidero.

$\square$

Problema 1.25. Dada la ecuación $x'(t) = (x^2 - 9)(\sin x - 2)$

(a) Encuentre todos los puntos de equilibrio y determine su estabilidad.

(b) Esboce el gráfico de la función $x(t)$ que es solución de la ecuación anterior y que satisface $x(0) = 1$. En particular, determine $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ justificando su respuesta.

Solución:

(a) Los puntos de equilibrio son las raíces de $f(x) = (x^2 - 9)(\sin x - 2)$. Como $\sin x - 2$ es siempre negativo, los únicos puntos de equilibrio son $x = \pm 3$. Notemos que $f(x) > 0$ para $x \in (-3, 3)$ y $f(x) < 0$ para $x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$. Así, agrupando la información en un diagrama de fase,

$$\begin{array}{rcl} & \downarrow & (-) \\ & \downarrow & \\ 3 & \bullet & \\ & \uparrow & (+) \\ & \uparrow & \\ -3 & \bullet & \\ & \downarrow & (-) \\ & \downarrow & \end{array}$$

notamos que $x = -3$ es una fuente, mientras que $x = 3$ es un sumidero. Por tanto, $x = 3$ es un equilibrio estable mientras que $x = -3$ es inestable.

(b) Como $f(1)$ es positiva, la curva es inicialmente creciente y ello se mantiene en tanto $-3 < x < 3$. Por otro lado, como f y f' son continuas para todo x, en los valores de equilibrio $x = \pm 3$ se verifican las condiciones del Teorema de Existencia y Unicidad y por tanto las constantes son las únicas soluciones a través de cualquiera de tales puntos. Ello implica que la solución buscada permanece acotada:

$$-3 < x(t) < 3\ , \quad \forall t$$

y por tanto la curva es siempre creciente. En particular,

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 3$$

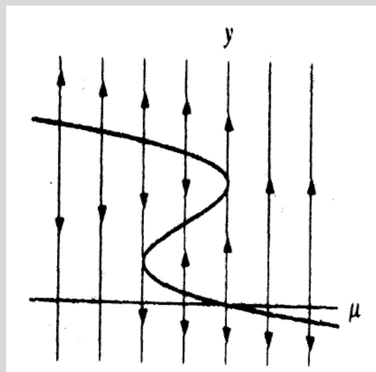
$\square$

Problema 1.26. Determine las bifurcaciones de $y' = y(1-y)^2 + \alpha$

Solución: Las ecuaciones a resolver son:

$$y(1-y)^2 + \alpha = 0 \quad \wedge \quad f_y(y,\alpha) = 1 - 4y + 3y^3 = 0$$

Resolviendo la ecuación para y obtenemos $y = 1, \frac{1}{3}$. Reemplazando en $f(y,\alpha) = 0$ obtenemos $\alpha = 0, -\frac{4}{27}$. Así, tenemos bifurcaciones en $y = 1, \alpha = 0$ y en $y = \frac{1}{3}, \alpha = -\frac{4}{27}$:



□

Problema 1.27. Considere las siguientes ecuaciones diferenciales

(a) $y' = y^2 + ay \qquad a \in \mathbb{R}$.

(b) $y' = y^2 + a \qquad a \in \mathbb{R}$.

En cada caso encuentre puntos de equilibrio y clasifíquelos. Además encuentre valores de a de bifurcación paramétrica y dibuje el diagrama de bifurcación.

Solución:

(a) Primero buscamos los puntos de equilibrio, aquellos en que

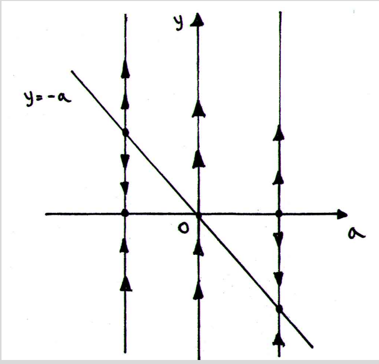
$$f(y) = y^2 + ay = 0$$

Se obtienen los equilibrios $y = 0$ e $y = -a$. Recordar que los valores de bifurcación de a son aquellos en que una pequeña variación implica que cambia el número de equilibrios de la ecuación. En este caso obtenemos como único valor $a = 0$. En efecto:

- Si $a > 0$ existen dos equilibrios. El primero es $y = 0$, en el cual se tiene que $f'(0) = a > 0$ por lo que es una fuente (o repulsor). Mientras que en $y = -a$ se tiene $f'(-a) = -a < 0$ por lo que corresponde a un sumidero (o atractor).
- Si $a = 0$ existe un único equilibrio, $y = 0$, para el cual se tiene que $f'(0) = 0$, por lo que analizaremos los cambios de signo de $f(y)$ para clasificar este equilibrio. Se tiene que $f(y) = y^2$ es positivo ya sea si $y < 0$ o $y > 0$, por lo que este equilibrio corresponde a un nodo.

- Si $a < 0$ hay dos equilibrios, $y = 0$ para el cual $f'(0) = a < 0$ por lo que es un sumidero, y el equilibrio $y = -a$ en el cual $f'(-a) = -a > 0$, por lo que es una fuente.

Finalmente el diagrama de bifurcaciones:



□

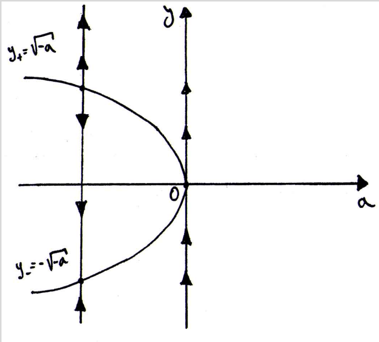
(b) Buscamos equilibrios para la nueva ecuación

$$f(y) = y^2 + a = 0.$$

Se obtiene $y = \pm\sqrt{-a}$. Claramente 0 es un valor de bifurcación.

- Si $a > 0$ no existen equilibrios.
- Si $a = 0$ existe un único equilibrio, $y = 0$, para el cual se tiene que $f(y) = y^2$ es positivo ya sea si $y < 0$ o $y > 0$, por lo tanto este equilibrio corresponde a un nodo.
- Si $a < 0$ hay dos equilibrios, $y_{\pm} = \pm\sqrt{-a}$ y se tiene que $f'(\pm\sqrt{a}) = \pm 2\sqrt{-a}$ por lo que $y_+ = \sqrt{-a}$ es una fuente e $y_- = -\sqrt{-a}$ es un sumidero.

Finalmente el diagrama de bifurcaciones:



□

Problema 1.28. Considere la ecuación diferencial

$$y' = y^2 - 6y + 4 + \mu$$

donde μ es un parámetro real.

(a) Para cada $\mu \in \mathbb{R}$ fijo, encuentre los puntos de equilibrio de la EDO y clasifíquelos.

(b) Encuentre los valores μ de bifurcación paramétrica y dibuje el diagrama de bifurcación.

Solución:

(a) Los puntos de equilibrio son las raíces reales de la ecuación polinomial

$$y^2 - 6y + 4 + \mu = 0$$

La ecuación cuadrática tiene soluciones reales si y solo si el discriminante es positivo; es decir, si y solo si $\mu \leq 5$. Si $\mu < 5$ tenemos dos soluciones distintas:

$$y(\mu) = 3 \pm \sqrt{5 - \mu}$$

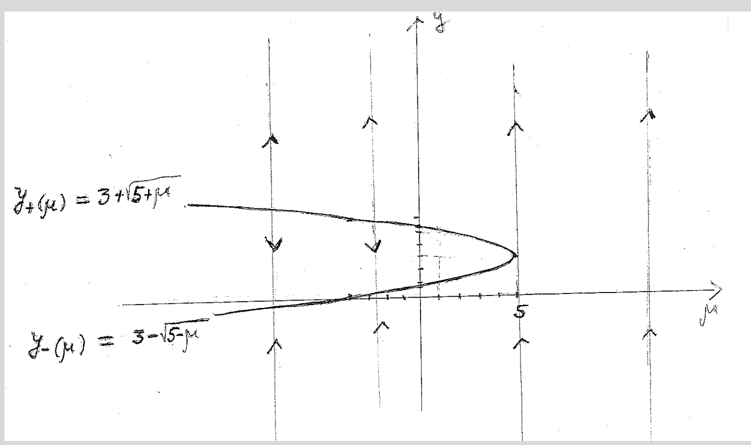
Si $\mu = 5$ tenemos una solución real única igual a 3. Como resultado:

- Si $\mu < 5$ hay dos puntos de equilibrio que son $y_-(\mu) = 3 - \sqrt{5-\mu}$, $y_+(\mu) = 3 + \sqrt{5-\mu}$.
- Si $\mu = 5$ hay un punto de equilibrio que es $y = 3$.
- Si $\mu > 5$ no hay puntos de equilibrio.

Supongamos que $\mu < 5$; tenemos que $y^2 - 6y + 4 + \mu > 0$ si $y > y_+$, $y^2 - 6y + 4 + \mu < 0$ si $y_- < y < y_+$, $y^2 - 6y + 4 + \mu > 0$ si $y < y_-$. Por lo tanto, y_+ es un equilibrio inestable (fuente), mientras que y_- es equilibrio estable (sumidero).

Ahora, si $\mu = 5$ tenemos que $y^2 - 6y + 4 + \mu = y^2 - 6y + 9 > 0$ si $y \neq 3$. Entonces, $y = 3$ es un equilibrio semiestable (nodo).

(b) El punto $\mu = 5$ es el único valor de bifurcación paramétrica, ya que el número de puntos de equilibrio es diferente para valores mayores y menores del parámetro (cero si $\mu > 5$, dos para $\mu < 5$). El diagrama de bifurcación se presenta a continuación:



□

2

Ecuaciones de Orden Superior

2.1. Ecuación Homogénea de Coeficientes Constantes

Problema 2.1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $y'' + 3y' + 2y = 0$

(b) $y''' + y'' - 2 = 0$

Solución:

(a) Es claro que la solución serán combinaciones lineales de funciones del tipo: e^{sx} con s por determinar. Es claro que reemplazando en la ecuación tenemos:

$$(s^2 + 3s + 2)e^{sx} = 0$$

Como la exponencial será positiva podemos cancelarla y que para encontrar s tenemos que resolver el *polinomio característico* asociado a esta EDO:

$$(s^2 + 3s + 2) = (s+1)(s-2) = 0 \longrightarrow s_1 = -1 \quad , \quad s_2 = -2$$

lo que claramente nos entrega la solución:

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$$

□

(b) Si reiteramos el proceso tenemos el siguiente polinomio característico:

$$s^3 + s^2 - 2 = 0 \longrightarrow (s-1)(s^2 + 2x + 2) = 0$$

puesto que claramente $s = 1$ es una raíz del polinomio. Por otro lado las otras raíces son complejas conjugadas dadas por:

$$s_\pm = -1 \pm i$$

Entonces la solución al problema será:

$$y(x) = k_1 e^x + k_2 e^{(-1+i)x} + k_3 e^{(-1-i)x} = k_1 e^x + k_2 e^{-x} e^{ix} + k_3 e^{-x} e^{-ix}$$

Si recordamos la famosa fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

podemos transformar nuestro problema:

$$\begin{aligned} y(x) &= k_1e^x + k_2e^{-x}(\cos x + i\sin x) + k_3e^{-x}(\cos(-x) + i\sin(-x)) \\ &= k_1e^x + k_2e^{-x}(\cos x + i\sin x) + k_3e^{-x}(\cos(x) - i\sin(x)) \end{aligned}$$

Notemos que esto es posible reordenarlo de la siguiente forma:

$$y(x) = k_1e^x + e^{-x}\cos(x)(k_2 + k_3) + e^{-x}\sin(x)(ik_2 - ik_3)$$

Si ponemos

$$C_1 = k_1 \quad , \quad C_2 = (k_2 + k_3) \quad , \quad C_3 = (ik_2 - ik_3)$$

Podemos dejar nuestra solución expresada de la forma:

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}\cos(x) + C_3e^{-x}\sin(x)$$

Observación: De aquí podemos generalizar la solución real a este tipo de problemas. Siempre que se tenga una raíz compleja conjugada para el polinomio característico de la forma $s = \sigma \pm i\omega$ podemos obtener que su solución para esa raíz esta dada por:

$$C_1e^{\sigma x}\cos(\omega x) + C_2e^{\sigma x}\sin(\omega x)$$

□

Problema 2.2.

(a) Encuentre todas las soluciones de

$$y'' + 4y = 0 \quad ; \quad y(0) = 0 \quad ; \quad y(\pi) = 0$$

(b) Determine los valores posibles para α tales que la siguiente EDO tiene soluciones no nulas.

$$y'' + \alpha y = 0 \quad ; \quad y(0) = 0 \quad ; \quad y(\pi) = 0$$

Solución:

(a) Para la ecuación $y'' + 4y = 0$, se tiene que su solución general es:

$$y(t) = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)$$

Aplicando las condiciones dadas se tiene que:

$$0 = C_1\underbrace{\cos(0)}_{1} + C_2\underbrace{\sin(0)}_{0} = C_1$$

$$0 = \underbrace{C_1}_{0}\cos(2\pi) + C_2\underbrace{\sin(2\pi)}_{0}$$

Entonces la solución es de la forma $y(t) = C\sin(t)$.

$\square$

(b) Consideraremos 3 situaciones posibles, la primera es si $\alpha = -\beta < 0$, luego $\alpha = 0$ y por último $\alpha > 0$.
Si tenemos el caso $\alpha = -\beta < 0$, la solución general de la ecuación $y'' - \beta y = 0$ es:

$$y(t) = C_1 e^{\sqrt{\beta} t} + C_2 e^{-\sqrt{\beta} t}$$

Aplicando las condiciones iniciales se tiene:

$$0 = C_1 + C_2$$

$$0 = C_1 e^{2\sqrt{\beta}\pi} + C_2 e^{-2\sqrt{\beta}\pi}$$

De lo que se concluye que $C_1 = C_2 = 0$, entonces la solución es nula. Si tenemos $\alpha = 0$, la ecuación se reduce a $y'' = 0$, cuya solución general es:

$$y(t) = C_1 + C_2 t$$

Donde al aplicar las condiciones se concluye que la solución también es nula. Por último nos queda el caso en que $\alpha > 0$, donde la solución general de la ecuación es:

$$y(t) = C_1 \cos(\sqrt{\alpha} t) + C_2 \sin(\sqrt{\alpha} t)$$

Ahora aplicamos las condiciones y tenemos:

$$0 = C_1 \underbrace{\cos(0)}_{1} + C_2 \underbrace{\sin(0)}_{0} = C_1$$

$$0 = C_2 \sin(2\sqrt{\alpha}\pi)$$

De esto último tenemos dos opciones, o se tiene que $C_2 = 0$ o sino $2\sqrt{\alpha} = n$, con $n \in \mathbb{Z}$, por lo tanto se tiene que las soluciones en este caso son de la forma:

$$y(t) = C \sin\left(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 t\right)$$

$\square$

Problema 2.3. Considere la ecuación diferencial:

$$ay'' + by' + c = 0$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

(a) La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama periódica si existe $T > 0$ tal que $f(x + T) = f(x)$ para cada $t \in \mathbb{R}$. La función f se llama acotada en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ si existe $C > 0$ tal que $|f(t)| \leq C$ para cada $t \in I$.
Encuentre criterio sobre a, b y c para que cada solución de la ecuación diferencial sea:

i. periódica

ii. acotada para $t > 0$;

iii. acotada para $t \in \mathbb{R}$

(b) Se dice que la función diferenciable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene punto crítico $t_0 \in \mathbb{R}$ si la derivada de f se anula en t_0, es decir $f'(t_0) = 0$. Encuentre criterio sobre a, b y c para que cada solución de la ecuación diferencial tenga al menos dos puntos críticos en $\mathbb{R}$.

Solución: Primero pongamos $\beta = b/(2a)$ y $\gamma = c/a$. Vamos a dar todas las respuestas en términos de los parámetros β y γ. La ecuación queda:

$$y'' + 2\beta y + \gamma y = 0$$

Usando el polinomio característico nos queda:

$$s^2 + 2\beta s + \gamma s = 0 \longrightarrow s_{1,2} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\gamma}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \gamma}$$

Así tenemos tres casos distintos:

- $\beta^2 - \gamma > 0$. Entonces la raíz es positiva y la solución esta dada por:

$$y(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

- $\beta^2 - \gamma = 0$. Entonces la raíz es 0, tenemos 2 raíces iguales y por ende:

$$y(t) = Ae^{-\beta t} + Bte^{-\beta t}$$

- $\beta^2 - \gamma < 0$. Entonces la raíz es negativa y luego obtenemos soluciones sinusoidales dadas por:

$$y(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t) + Be^{-\beta t}\sin(\omega t) = Ce^{-\beta t}\cos(\omega t - \delta)$$

  con $\omega = \sqrt{\gamma - \beta^2}$, $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ y $\delta = \arctan(B/A)$. Volviendo al problema:

(a)

i. Notamos que solo en el tercer caso existe la posibilidad de que sea periódica, si exigimos que $\beta = 0$ entonces nos quedará una función sinusoidal y por ende periódica. En resumen se requiere $\beta = 0$ y $\beta^2 - \gamma < 0 \;\to\; \gamma > 0$.

ii. Para que la primera sea acotada para $t > 0$ se requiere que la función no explote en el infinito ni tenga indeterminaciones (en este tipo de funciones no habrá). En el primer caso, se requiere que ambas exponenciales no sean positivas (no podemos imponer condiciones sobre A y B). Así notamos que necesitamos que $s_1 \leq 0$ y $s_2 \leq 0$. De las propiedades de las raíces de una cuadrática sabemos que:

$$s_1 + s_2 = -2\beta \quad \wedge \quad s_1 s_2 = \gamma$$

así en este caso las condiciones son equivalentes a $\beta > 0$ y $\gamma \geq 0$.

Para que el segundo caso sea acotada necesitamos que la exponencial sea estrictamente negativa (pues le ganará al polinomio). Debemos imponer entonces que

$-\beta < 0 \ \rightarrow \ \beta > 0$. Eso implica inmediatamente dado que $\beta^2 - \gamma = 0$ entonces $\gamma > 0$.

La solución en el tercer caso será acotada si la exponencial no es positiva (puede ser 0 el exponente, pues seno y coseno son acotados). Luego la condición es $\beta \geq 0$. Esto implica nuevamente que $\gamma > 0$.

iii. Notemos ahora que el primer caso nunca será acotado (salvo imponiendo condiciones sobre A, B). El segundo caso tampoco podemos hacerlo acotado, salvo si $B = 0$. Y en el tercer caso solo necesitamos imponer que la exponencial no exista, luego $\beta = 0$ implica eso. Lo anterior implica que $\gamma > 0$. □

(b) La derivada de la función general esta dada según los casos:

- $y'(t) = As_1e^{s_1t} + Bs_2e^{s_2t}$
- $y'(t) = e^{-\beta t}(B - \beta(A + Bt))$
- $y'(t) = -Ce^{-\beta t}(\beta\cos(\omega t - \delta) + \omega\sin(\omega t - \delta))$

Para el primer y segundo caso necesitamos imponer condiciones sobre A y B para encontrar solución. Si en el primer caso imponemos que $A^2 + B^2 \neq 0$ podemos tener una solución. En el segundo caso si imponemos $B \neq 0$ podemos encontrar una sola solución. Pero en el caso c es posible encontrar infinitas soluciones sin imponer condiciones sobre A y B. Así la condición para que tenga a lo menos 2 puntos críticos necesitamos imponer que $\beta^2 - \gamma < 0$. □

2.2. Coeficientes Indeterminados

Problema 2.4. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales usando el método de los coeficientes indeterminados.

(a) $y^{(4)} - 4y''' + 5y'' = t + \cos t$

(b) $\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = t^2$

Solución:

(a) Resolvamos la homogénea, el polinomio característico es:

$$s^4 - 4s^3 + 5s^2 = s^2(s^2 - 4s + 5)$$

De aquí tenemos la solución $s = 0$ con multiplicidad 2, y tenemos para el otro polinomio las raíces complejas conjugadas: $2 \pm i$, por lo tanto la solución homogénea es:

$$y_h = C_1 e^{0t} + C_2 t e^{0t} + C_3 e^{2t}\cos(t) + C_4 e^{2t}\sin(t) = C_1 + C_2 t + C_3 e^{2t}\cos(t) + C_4 e^{2t}\sin(t)$$

Recordemos ahora un poco de aniquiladores, consisten en aquel operador que hace 0 una expresión. Por ejemplo, si ponemos $D = d/dt$ (en general en otras partes este operador se anota como s, que es la razón de porque yo use la letra s para el polinomio característico, pues esto es extendible a la homogénea) tenemos que para la función t tenemos que D^2 aniquila a la función, pues $(t)'' = 0$. Así mismo es posible hacer la siguiente tabla:

Función	Aniquilador
t^n	D^{n+1}
e^{at}	$D - a$
$\cos(bt)$	$D^2 + b^2$
$\sin(bt)$	$D^2 + b^2$
$e^{at}\cos(bt)$	$D^2 - 2aD + a^2 + b^2$
$e^{at}\sin(bt)$	$D^2 - 2aD + a^2 + b^2$

Es muy importante notar que si se reitera la multiplicidad debemos variar la solución. Por ejemplo en este caso tenemos que D^2 aniquila a t y D^2+1 aniquila a $\cos t$ entonces $D^2(D^2+1)$ aniquila a la función de la derecha. Vale decir que tenemos $D = 0$ (con multiplicidad 2) y $D = \pm i$ las raices del polinomio anterior. Pero de la solución homogénea ya tiene solución $D = 0$ (es lo mismo que $s = 0$) con multiplicidad 2, así que tenemos que tener cuidado que función acompaña a los coeficientes indeterminados. En este caso:

$$y_p = At^2 + Bt^3 + C\cos(t) + D\sin(t)$$

Lo que se debe hacer ahora es introducir la solución particular a la EDO, esto nos queda:

$$t + \cos(t) = \Big(C\cos(t) + D\sin(t)\Big) + \Big(-24B - 4C\sin(t) + 4D\cos(t)\Big)$$
$$+ \Big(10A + 30Bt - 5C\cos(t) - 5D\sin(t)\Big)$$

Agrupando términos nos queda:

$$t+\cos(t)=(10A-24B)+t(30B)+t^2(60B)+\cos(t)(-4C+4D)+\sin(t)(-4C-4D)$$

Que nos genera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{ccc} 10A-24B & = & 0 \\ 30B & = & 1 \\ -4C+4D & = & 1 \\ -4C-4D & = & 0 \end{array}\right|$$

Que al resolver entrega:

$$A=\frac{2}{25}\quad,\quad B=\frac{1}{30}\quad,\quad C=-\frac{1}{8}\quad,\quad D=\frac{1}{8}$$

Y por lo tanto la solución final es:

$$y(t)=C_1+C_2t+C_3e^{2t}\cos(t)+C_4e^{2t}\sin(t)+\frac{2}{25}t^2+\frac{1}{30}t^3-\frac{1}{8}\cos(t)+\frac{1}{8}\sin(t)$$

$\square$

(b) El polinomio característico es: $s^2-6s+9=(s-3)^2$, de donde es claro que la solución homogénea será:

$$x_h=C_1e^{3t}+C_2te^{3t}$$

Notamos que un aniquilador de la función particular es D^3 y por ende su raíz es 0 con multiplicidad 3, y por lo tanto la solución particular será de la forma $x_p=A+Bt+Ct^2$, lo que implica reemplazando en la ecuación que:

$$2C-6(B+2Ct)+9(A+Bt+Ct^2)=t^2$$

Resolviendo el sistema nos queda:

$$A=\frac{2}{27}\quad,\quad B=\frac{4}{27}\quad,\quad C=\frac{1}{9}$$

y por ende la solución final es:

$$x(t)=C_1e^{3t}+C_2te^{3t}+\frac{2}{27}+\frac{4}{27}t+\frac{1}{9}t^2$$

Problema 2.5. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales mediante el método de coeficientes indeterminados:

(a) $y''+3y'+2y=e^{-2x}+x^2$

(b) $y'''-y'=e^{2x}\sin^2(x)$

Solución:

(a) La ecuación diferencial se puede escribir usando operadores diferenciales como:

$$(D+1)(D+2)y = e^{-2x} + x^2$$

La solución de la ecuación homogénea es claramente:

$$y_h = a_1 e^{-x} + a_2 e^{-2x}$$

Ahora, considerando que $D^3\left[x^2\right] = 0$ y $(D+2)\left[e^{-2x}\right] = 0$, al aplicar el operador diferencial $(D+2)D^3$ a ambos lados de la ecuación diferencial se obtiene una ecuación homogénea:

$$(D+1)(D+2)^2 D^3[y] = 0$$

La solución general de esta ecuación se obtiene de manera inmediata:

$$y = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x)e^{-2x} + (c_4 + c_5 x + c_6 x^2)$$

Eliminando términos comunes a la solución de la ecuación homogénea, se obtiene la forma de la solución particular:

$$y_p = c_1 x e^{-2x} + (c_2 + c_3 x + c_4 x^2)$$

Reemplazando esta solución en la ecuación diferencial original, se tiene:

$$-c_1 e^{-2x} + (2c_4 + 3c_3 + 2c_2) + (6c_4 + 2c_3)x + (2c_4)x_2 = e^{-2x} + x^2$$

De lo cual se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rcl} -c_1 & = & 1 \\ 2c_4 + 3c_3 + 2c_2 & = & 0 \\ 6c_4 + 2c_3 & = & 0 \\ 2c_4 & = & 1 \end{array}$$

Cuya solución es:

$$c_1 = -1\ , \quad c_2 = \frac{7}{4}\ , \quad c_3 = -\frac{3}{2}\ , \quad c_4 = \frac{1}{2}$$

Con lo cual se halla la solución particular de la ecuación:

$$y_p = -xe^{-2x} + \frac{7}{4} - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2$$

Y la solución general es simplemente:

$$y = y_p + y_h$$

$\square$

(b) La ecuación diferencial resulta más fácil de resolver si reemplazamos la función $\sin^2 x$ mediante alguna identidad trigonométrica, de modo tal que:

$$y''' - y' = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\cos{(2x)}e^{2x}$$

Recordando que las funciones de la forma $e^{ax}\cos{(b)}, e^{ax}\sin{(b)}$ se aniquilan con un operador de la forma $D^2 - 2aD + a^2 + b^2$, es claro que en este caso se requiere el factor $(D^2 - 4D + 8)(D - 2)$.

La solución de la ecuación homogénea asociada es:

$$y_h = a_1 + a_2e^x + a_3e^{-x}$$

Ahora, aplicando el operador diferencial antes mencionado a ambos lados de la ecuación se obtiene una nueva ecuación homogénea:

$$D(D-1)(D+1)(D^2-4D+8)(D-2)[y] = 0 \longleftrightarrow D(D-1)(D+1)(D-r_1)(D-r_2)(D-2)[y] = 0$$

con $r_1 = 2+2i$ y $r_2 = 2-2i$. Por lo tanto, la forma de la solución particular de esta ecuación, omitiendo términos comunes a la solución homogénea, será:

$$y_p = e^{2x}\Big(c_1 + c_2\cos{(2x)} + c_3\sin{(2x)}\Big)$$

Reemplazando y_p en la ecuación diferencial se obtiene:

$$-2e^{2x}\Big(-3c_1 + \cos{(2x)}(9c_2 - 7c_3) + \sin{(2x)}(9c_3 + 7c_2)\Big) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\cos{(2x)}e^{2x}$$

De lo cual se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} 6c_1 &= \frac{1}{2} \\ 9c_2 - 7c_3 &= \frac{1}{4} \\ 9c_3 + 7c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Cuya solución es:

$$c_1 = \frac{1}{12}\ , \quad c_2 = \frac{9}{520}\ , \quad c_3 = -\frac{7}{520}$$

Con lo cual se ha resuelto la solución particular de la ecuación:

$$y_p = e^{2x}\left(\frac{1}{12} + \frac{9}{520}\cos{(2x)} - \frac{7}{520}\sin{(2x)}\right)$$

Y la solución general es simplemente:

$$y = y_p + y_h$$

□

Problema 2.6. Resuelva

$$f''(x) + f(-x) = x + \cos(x) \qquad (E).$$

Puede resultar conveniente separar f en su parte par e impar.

Solución: Se buscará $f : I \to \mathbb{R}$ dos veces derivable, donde I es un intervalo simétrico respecto a 0 (de la forma $[-a, a]$).

De las relaciones:

$$\begin{cases} f''(x) + f(-x) = x + \cos(x) \\ f''(-x) + f(x) = -x + \cos(x) \end{cases}$$

se deduce que:

$$\begin{cases} [f''(x) + f''(-x)] + [f(x) + f(-x)] = 2\cos(x) \\ .[f''(x) - f''(-x)] - [f(x) - f(-x)] = 2x \end{cases}$$

Así, las funciones g y h definidas en I por:

$$g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \qquad \text{y} \qquad h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

son dos veces derivables y verifican: g es par, h es impar,

$$g''(x) + g(x) = \cos(x) \qquad \text{y} \qquad h''(x) - h(x) = x.$$

Ahora debemos resolver este par de ecuaciones. Para g tenemos

$$(D^2 + 1)g = \cos(x).$$

Como solución homogénea obtenemos

$$g_h(x) = A\cos(x).$$

Observar que se ha omitido la función $\sin(x)$ pues g es una función impar. Luego buscamos una solución particular. Notamos que

$$(D^2 + 1)^2 g_p = 0,$$

con lo cual, al omitir términos de la solución homogénea y la solución impar, obtenemos

$$g_p(x) = Bx\sin(x).$$

Basta reemplazar en la ecuación diferencial para notar que $B = 1/2$. Con lo cual

$$g(x) = A\cos(x) + \frac{1}{2}x\sin(x).$$

Ahora busquemos las soluciones para la ecuación diferencial

$$(D^2 - 1)h = x.$$

La solución homogénea es

$$h_h(x) = Ce^x + De^{-x},$$

pero debemos quedarnos con la parte impar de esta función que es

$$h_h(x) = \underbrace{E}_{(C-D)/2}(e^x - e^{-x}).$$

A continuación buscamos una solución particular. Vemos que

$$D^2(D^2-1)h_p = 0,$$

por lo que una solución particular impar debe ser de la forma

$$h_p = Fx.$$

Al reemplazar en la ecuación diferencial notamos que $F = -1$, con lo cual

$$h(x) = E(e^x - e^{-x}) - x.$$

Así, la solución de (E) viene dada por $f(x) = g(x) + h(x)$, es decir,

$$f(x) = A\cos(x) + E(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2}x\sin(x) - x \qquad A, E \in \mathbb{R}.$$

Esta solución es válida para $x \in \mathbb{R}$.

$\square$

Problema 2.7.

(a) Determine la solución general de

$$y'' - y' - 2y = e^{-x}\cos(x) + (6+x)e^{-x}$$

(b) Determine, si las hubiera, todas las soluciones que satisfagan $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$

Solución:

(a) Las raíces del polinomio caracteristico de la ecuación homogenea $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$ son $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$. Por ende, la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$$

Ahora bien, como el operador $(D+1)^2$ *aniquila* a $(6+x)e^{-x}$, y (D^2+2D+2) hace lo suyo con la parte real de la exponencial compleja, se cumple que:

$$\Big((D+1)^3(D-2)(D^2+2D+2)\Big)y_p = 0$$

Así,

$$y_p = a_1\cos(x)e^{-x} + a_2\sin(x)e^{-x} + a_3 e^{2x} + (a_4 + a_5 x + a_6 x^2)e^{-x}$$

Sin pérdida de generalidad, $a_3 = a_4 = 0$. Reemplazando y_p en la EDO original, obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3a_1 - a_2 &= 0 \\ -3a_2 - a_1 &= 1 \\ 2a_6 - 3a_5 &= 6 \\ -6a_6 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad a_1 = -\frac{1}{10} \quad , \quad a_2 = -\frac{3}{10} \quad , \quad a_5 = -\frac{19}{9} \quad , \quad a_6 = -\frac{1}{6}$$

Finalmente,

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{10} e^{-x} \cos(x) - \frac{3}{10} e^{-x} \sin(x) - \left(\frac{19x}{9} + \frac{x^2}{6} \right) e^{-x}$$

(b) Hay infinitas soluciones que cumplen con la condición deseada; son aquellas que corresponden a la elección de $c_1 = 0$ y $c_2 \in \mathbb{R}$.

$\square$

2.3. Variación de Parámetros y Reducción de Orden

Problema 2.8. Resolver la ecuación $(E) : y'' + 6y' + 9y = \dfrac{e^{-3x}}{\sqrt{x^2+1}}$.

Solución: La ecuación es lineal de coeficientes constantes.

• *Resolvemos la ecuación homogénea.* $y'' + 6y' + 9y = 0 \quad (E')$

La ecuación característica es : $r^2 + 6r + 9 = 0$ i.e. $(r+3)^2 = 0$.
La solución general de (E') es entonces $y = (\lambda x + \mu)e^{-3x}$.

• *Método de variación de constantes.* Buscamos una solución particular de la forma $y = ue^{-3x} + vxe^{-3x}$, donde u, v son funciones continuamente diferenciables. Con esto, y es solución de (E) sobre $\mathbb{R}$ si y solo si:

$$\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} u'e^{-3x} + `v'xe^{-3x} = 0 \\ -3u'e^{-3x} + v'(1-3x)e^{-3x} = \frac{e^{-3x}}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$$

lo que es equivalente a

$$\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} u' + v'x = 0 \\ -3u' + v'(1-3x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$$

por lo tanto

$$\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} u' = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ entonces } u = a - \sqrt{1+x^2} \\ v' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ entonces } v = b + \ln|x + \sqrt{1+x^2}| \end{cases}$$

Finalmente la solución general de (E) es

$$y = (a + bx)e^{-3x} + (x \ln|x + \sqrt{1+x^2}| - \sqrt{1+x^2})e^{-3x} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

□

Problema 2.9. Encuentre la solución general de la siguiente ecuación:

$$x^2y'' + xy' - 4y = 1$$

sabiendo que $y_1(x) = x^2$ es una solución de la ecuación homogénea asociada.

Solución: Mediante variación de parámetros, buscamos la otra solución a la homogénea de la forma $y_2(x) = v(x)y_1(x)$. Entonces:

$$y_2' = v'y_1 + vy_1'$$
$$y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy''$$

Para que sea solución de la homogénea imponemos:

$$x^2(v''y_1 + 2v'y_1' + vy'') - x(v'y_1 + vy_1') - 4vy_1 = 0$$

Agrupando términos:

$$x^2v''y_1 + 2v'y'x^2 + v\underbrace{(x^2y_1'' + xy_1' - 4y_1)}_{0} + xv'y_1 = 0$$

Reemplazando y_1 nos queda:

$$x^2v''x^2 + 4v'x^3 + xv'x^2 = 0$$

Agrupando:

$$xv'' + 5v' = 0$$

Resolviendo:

$$v'(x) = -\frac{1}{x^5} \longrightarrow v(x) = \frac{1}{4x^4} + C$$

De esta manera $y_2(x) = \frac{1}{4x^4} \cdot x^2 = \frac{1}{4x^2}$, con la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y_h = Ax^2 + \frac{B}{x^2}$$

Es simple notar una solución particular como $y_p = -\frac{1}{4}$.

□

Problema 2.10. Encuentre la solución general para la siguiente EDO no homogénea:

$$y''' + 5y'' + 6y' = \frac{1}{1 + e^{2t}}$$

con

$$y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$$

Solución: Tenemos la ecuación no homogénea:

$$y''' + 5y'' + 6y' = \frac{1}{1 + e^{2t}}$$

La reescribimos por sus operadores diferenciales y buscamos las soluciones de la homogénea de forma e^{rt}:

$$D(D^2 + 5D + 6)y(t) = \frac{1}{1 + e^{2t}}$$

Lo que nos entrega:

$$r_1 = 0, \quad r_2 = -2, \quad r_3 = -3$$

Entonces tenemos que la solución para la ecuación homogénea es:

$$y_H = C_1 + C_2e^{-2t} + C_3e^{-3t}$$

Por el método de Variación de Parámetros podemos buscar una solución particular de la forma:

$$y_P = u_1(t) + u_2(t)e^{-2t} + u_3(t)e^{-3t}$$

Lo que al derivar una cuantas veces, nos permite establecer el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & e^{-2t} & e^{-3t} \\ 0 & -2e^{-2t} & -3e^{-3t} \\ 0 & 4e^{-2t} & 9e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ u_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{1+e^{2t}} \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema por Cramer, podemos despejar a $u_1(t)$, $u_2(t)$ y a $u_3(t)$ (la idea esencial consiste en notar que vamos a definir nuestras integrales partiendo desde 0 hasta t, ya que algunas integrales no tendrán primitivas, pero esto no nos impedirá encontrar las condiciones iniciales):

$$u_1(t) = \int_0^t \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-2t} & e^{-3t} \\ 0 & -2e^{-2t} & -3e^{-3t} \\ \frac{1}{1+e^{2t}} & 4e^{-2t} & 9e^{-3t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & e^{-2t} & e^{-3t} \\ 0 & -2e^{-2t} & -3e^{-3t} \\ 0 & 4e^{-2t} & 9e^{-3t} \end{vmatrix}} dt = \frac{1}{6}\int_0^t \frac{dt}{1+e^{2t}}$$

$$u_2(t) = \int_0^t \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{-3t} \\ 0 & 0 & -3e^{-3t} \\ 0 & \frac{1}{1+e^{2t}} & 9e^{-3t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & e^{-2t} & e^{-3t} \\ 0 & -2e^{-2t} & -3e^{-3t} \\ 0 & 4e^{-2t} & 9e^{-3t} \end{vmatrix}} dt = \frac{-1}{2}\int_0^t \frac{dt}{1+e^{-2t}}$$

$$u_3(t) = \int_0^t \frac{\begin{vmatrix} 1 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & -2e^{-2t} & 0 \\ 0 & 4e^{-2t} & \frac{1}{1+e^{2t}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & e^{-2t} & e^{-3t} \\ 0 & -2e^{-2t} & -3e^{-3t} \\ 0 & 4e^{-2t} & 9e^{-3t} \end{vmatrix}} dt = \frac{1}{3}\int_0^t \frac{e^{3t}dt}{1+e^{2t}}$$

Con esto podemos establecer una solución general a la ecuación:

$$y(t) = C_1 + C_2e^{-2t} + C_3e^{-3t} + \frac{1}{6}\int_0^t \frac{du}{1+e^{2u}} - \frac{e^{-2t}}{2}\int_0^t \frac{du}{1+e^{-2u}} + \frac{e^{-3t}}{3}\int_0^t \frac{e^{3u}du}{1+e^{2u}}$$

Lo que resta ahora es encontrar las constantes, notemos que la forma en que definimos la integral, nos arregla mucho el problema, pues al evaluar en 0, todas las integrales quedarán integrando en un punto, por lo que valdrán 0. Luego estamos listo con la primera ecuación:

$$y(0) = C_1 + C_2 + C_3 = -1$$

Por otro lado, derivar una vez, la solución es muy fácil, pues el TFC nos ayudará mucho, así:

$$\begin{aligned} y'(x) = -2C_2e^{-2t} - 3C_3e^{-3t} + \frac{1}{6(1+e^{2t})} - \frac{e^{-2t}}{2}\cdot\frac{1}{1+e^{-2t}} \\ + e^{-2t}\int_0^t \frac{du}{1+e^{-2u}} + \frac{e^{-3t}}{3}\cdot\frac{e^{3t}}{1+e^{2t}} - e^{-3t}\int_0^t \frac{e^{3u}du}{1+e^{2u}} \end{aligned}$$

Luego evaluando en 0:

$$y'(0) = -2C_2 - 3C_3 \underbrace{+\frac{1}{12} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}}_{0} = 0$$

Luego derivamos nuevamente:

$$\begin{aligned} y''(x) = 4C_2e^{-2t} + 9C_3e^{-3t} - \frac{2e^{2t}}{6(1+e^{2t})^2} + \frac{2e^{2t}}{2(e^{2t}+1)^2} \\ - 2e^{-2t}\int_0^t \frac{du}{1+e^{-2u}} + e^{-2t} \cdot \frac{1}{1+e^{-2t}} - \frac{2e^{2t}}{3(1+e^{2t})^2} \\ + 3e^{-3t}\int_0^t \frac{e^{3u}du}{1+e^{2u}} - e^{-3t} \cdot \frac{e^{3t}}{1+e^{2t}} \end{aligned}$$

Evaluando en 0:

$$y''(0) = 4C_2 + 9C_3 \underbrace{-\frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}}_{0} = 1$$

Resumiendo nos queda el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} C_1 + C_2 + C_3 & = & -1 \\ -2C_2 - 3C_3 & = & 0 \\ 4C_2 + 9C_3 & = & 1 \end{array}\right|$$

Resolviendo el sistema obtenemos:

$$C_1 = -\frac{5}{6}, \quad C_2 = -\frac{1}{2}, \quad C_3 = \frac{1}{3}$$

□

Observación: Notemos que debían dar 0 todas las condiciones de iniciales para la solución particular por la forma que definimos nuestros coeficientes u_i (que parten desde el punto 0 hasta t); pues en efecto notemos que hemos definido

$$y_p = y_1(t)u_1(t) + y_2(t)u_2(t) + y_3(t)u_3(t)$$

con la condición que $u_1(0) = u_2(0) = u_3(0) = 0$, luego es claro que $y_p(0) = 0$. Ahora si derivamos:

$$y_p' = y_1'u_1 + y_1u_1' + y_2'u_2 + y_2u_2' + y_3'u_3 + y_3u_3'$$

Aquí cuando evaluemos en 0, es claro que los términos que están acompañados por u_i sin derivar, valdrán 0. Por otro lado lo que nos queda es:

$$y_1u_1' + y_2u_2' + y_3u_3'$$

Pero esto último es claro que es 0 $\forall t$, puesto que cuando hacemos variación de parámetros imponemos eso. Esto implica que $y_p'(0) = 0$. Si reiteramos el proceso llegamos a lo mismo, con lo que $y_p''(0) = 0$. Así hemos llegado a una forma de que la solución particular no influye en encontrar las constantes.

Problema 2.11. Mediante el método de variación de parámetros, resuelva las siguientes ecuaciones:

(a) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 2x^3$

(b) $y'' + 10y' + 25y = e^{5x}\ln(x)$

Solución: Sea $y'' + p(x)y' + q(x)y = b(x)$ una ecuación diferencial donde y_1 e y_2 son soluciones al problema homogéneo. Buscamos una solución particular de la forma:

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$$

Derivando:

$$y_p{}' = C_1{}'y_1 + C_1y_1{}' + C_2{}'y_2 + C_2y_2{}'$$

Por conveniencia utilizamos

$$C_1{}'y_1 + C_2{}'y_2 = 0 \tag{2.11.1}$$

Así, derivando lo que nos queda,

$$y_p{}'' = C_1{}'y_1{}' + C_1y_1{}'' + C_2{}'y_2{}' + C_2y_2{}''$$

Como y_p es una solución particular de la ecuación diferencial, entonces se debe cumplir que $y_p{}'' + p(x)y_p{}' + q(x) = b(x)$. Reemplazando:

$$C_1{}'y_1{}' + C_1y_1{}'' + C_2{}'y_2{}' + C_2y_2{}'' + p(x)\Big(C_1y_1{}' + C_2y_2{}'\Big) + q(x)\Big(C_1y_1 + C_2y_2\Big) = b(x)$$

Factorizando por C_1 y C_2:

$$C_1\Big(y_1{}'' + p(x)y_1{}' + q(x)y_1\Big) + C_2\Big(y_2{}'' + p(x)y_2{}' + q(x)y_2\Big) + C_1{}'y_1{}' + C_2{}'y_2{}' = b(x)$$

Pero, como y_1 e y_2 son soluciones homogéneas, entonces $y_1{}'' + p(x)y_1{}' + q(x)y_1 = y_2{}'' + p(x)y_2{}' + q(x)y_2 = 0$. Es decir,

$$C_1{}'y_1{}' + C_2{}'y_2{}' = b(x) \tag{2.11.2}$$

Por lo tanto, con las ecuaciones (2,1) y (2,2) podemos resolver $C_1{}', C_2{}'$, y luego integrando, resolver C_1 y C_2 y conocer la solución particular.

(a) La solución general de la ecuación diferencial está dada por:

$$y_g = y_p + y_h$$

La solución homogénea y_h la conocemos de la pregunta anterior, y es:

$$y_h = \beta_1 x + \beta_2 x e^x$$

Por lo tanto, solo falta determinar la solución particular y_p. Para ello, usamos el método de variación de parámetros. Resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1{}' & y_2{}' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1{}' \\ C_2{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Donde

- $y_1 = x$, con lo que ${y_1}' = 1$
- $y_2 = xe^x$, con lo que ${y_2}' = (1+x)e^x$
- $b = 2x$

IMPORTANTE: notar que en este caso $b(x) = 2x$ y no $2x^3$, pues es necesario que el coeficiente de y'' sea uno; por lo tanto, dividimos la ecuación por x^2.

Resolvemos mediante la *regla de Crammer*:

$$ {C_1}' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ 2x & (1+x)e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & xe^x \\ 1 & (1+x)e^x \end{vmatrix}} = \frac{-2x^2e^2}{x^2e^x} = -2 \quad \longrightarrow \quad C_1 = -2x $$

$$ {C_2}' = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & xe^x \\ 1 & (1+x)e^x \end{vmatrix}} = \frac{2x^2}{x^2e^2} = 2e^{-x} \quad \longrightarrow \quad C_2 = -2e^{-x} $$

Así, la solución particular es $y_p(x) = C_1y_1 + C_2y_2 = -2x^2 - 2x$, y por tanto:

$$ y_g(x) = \beta_1 x\beta_2 xe^x - 2x^2 - 2x $$

(b) Primero resolveremos el problema homogéneo. Como se trata de una ecuación lineal de coeficientes constantes, ocuparemos el *Método del Operador D*:

$$ y'' + 10y' + 25y = 0 \;\longleftrightarrow\; \Big(D^2 + 10D + 25\Big)y = 0 \;\longleftrightarrow\; \Big(D+5\Big)^2 y = 0 $$

y con ello

$$ y_h(x) = \alpha_1 e^{-5x} + \alpha_2 xe^{-5x} $$

Así, para hallar la solución particular, usamos el método de variación de parámetros, con:

- $y_1 = e^{-5x}$, con lo que ${y_1}' = -5e^{-5x}$
- $y_2 = xe^{-5x}$, con lo que ${y_2}' = (1-5x)e^x$
- $b = e^{-5x}\ln(x)$

Resolvemos:

$$ {C_1}' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -5e^{-5x} \\ e^{-5x}\ln(x) & (1-5x)e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-5x} & -5e^{-5x} \\ xe^{-5x} & (1-5x)e^x \end{vmatrix}} = -x\ln(x) \quad \longrightarrow \quad C_1 = \frac{x^2}{4} - \frac{x^2\ln(x)}{2} $$

$$ {C_2}' = \frac{\begin{vmatrix} e^{-5x} & 0 \\ xe^{-5x} & e^{-5x}\ln(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-5x} & -5e^{-5x} \\ xe^{-5x} & (1-5x)e^x \end{vmatrix}} = \ln(x) \quad \longrightarrow \quad C_2 = x\ln(x) - x $$

El reemplazo queda propuesto al lector.

□

Problema 2.12. Mediante el método de reducción de orden, encuentre las soluciones de las siguientes ecuaciones:

(a) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$

(b) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$

Solución: El método de reducción de orden nos permite obtener, conocida una de las funciones solución a la homogénea, y_1, la segunda función solución y_2 (linealmente independiente con y_1).

(a) Probamos con $y_1 = x^r$. Derivando:

$$y_1{}' = rx^{r-1} \qquad \wedge \qquad y_1{}'' = r(r-1)x^{r-2}$$

Reemplazando en la ecuación:

$$x^2r(r-1)x^{r-2} - 3xrx^{r-1} + 4x^r = 0$$

Simplificando por x^r, pues buscamos soluciones no idénticamente nulas,

$$r(r-1) - 3r + 4 = 0 \quad \longrightarrow \quad r = 2$$

Así, la primera solución es $y_1(x) = x^2$ para la ecuación $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Buscamos una segunda solución de la forma $y_2(x) = u(x)y_1(x)$. Si reemplazamos y_2 en la ecuación,

$$uy_1{}'' + 2y_1{}'u' + y_1u'' + p(x)uy_1{}' + p(x)y_1u' + q(x)uy_1 = 0$$

$$u\Big(y_1{}'' + p(x)y_1{}' + q(x)y_1\Big) + u''y_1 + u'\Big(2y_1{}' + p(x)y_1\Big) = 0$$

Pero $y_1{}'' + p(x)y_1{}' + q(x)y_1 = 0$, pues solución de la homogénea. Así, haciendo $w = u'$ y $f(x) = 2y_1{}' + p(x)y_1$, la ecuación anterior queda como sigue:

$$w'y_1 + wf(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad w(x) = \exp\left(-\int f(x)/y_1(x)\ dx\right)$$

En ese caso, como $f(x) = x$, tenemos que:

$$w(x) = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad u(x) = \ln(x) \quad \Longrightarrow \quad y_2(x) = x^2\ln(x)$$

y con ello la solución a la EDO es:

$$y(x) = \alpha_1x^2 + \alpha_2x^2\ln(x)\ , \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

(b) Nuevamente proponemos que $y_1 = x^r$, y reemplazamos en la ecuación y simplificamos por x^r:

$$r^2 - r - rx - 2r + x + 2 = x(1-r) + (r-1)(r-2) = 0$$

Como lo anterior debe satisfacerse $\forall x$, notamos que $r = 1$. Por lo tanto, $y_1(x) = x$. En este caso $f(x) = -x$ y por tanto:

$$w(x) = \exp\left(-\int -dx\right) = \exp(x) \quad \longrightarrow \quad u(x) = e^x$$

y con ello,

$$y(x) = \beta_1 x + \beta_2 x e^x \ , \quad \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$$

□

Problema 2.13. Se sabe que $y_1 = \dfrac{1}{1-x}$ es solución de $y'' - \dfrac{2y}{(1-x)^2} = 0$

(a) Determine una solución y_2 que complete el espacio de soluciones linealmente independientes para esta EDO.

(b) Encuentre la solución general de $y'' - \dfrac{2y}{(1-x)^2} = (1-x)^2$ con $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

Solución:

(a) Recordando la fórmula de Abel, tenemos que para una ecuación de la forma $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, se tiene que:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{\int p(t)dt}}{y_1^2} dx$$

Entonces ya que $p(x) = 0$, para esta EDO, tendríamos que:

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} dx = \frac{1}{1-x} \int (1-x)^2 dx = \frac{1}{3}(1-x)^2$$

Entonces tenemos que $y_2 = (1-x)^2$.

□

(b) Ya tenemos la solución general de la ecuación homogénea, entonces ahora resta determinar una solución particular, para lo cual vamos a utilizar variación de parámetros, entonces buscamos $c_1(x)$ y $c_2(x)$, tales que cumplan el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (1-x)^2 \end{pmatrix}$$

De donde despejamos:

$$c_1' = \frac{1}{3}(1-x)^4 \quad ; \quad c_2' = -\frac{1}{3}(1-x)$$

Por lo tanto:

$$c_1 = -\frac{1}{15}(1-x)^5 \quad ; \quad c_2 = \frac{1}{6}(1-x)^2$$

Entonces la solución general a la EDO es:

$$y(x) = y_h + y_p = \frac{a}{1-x} + b(1-x)^2 + \frac{1}{10}(1-x)^4$$

De las condiciones iniciales tenemos:

$$y(0) = a + b + \frac{1}{10} = 0$$

y notemos que

$$y'(x) = \frac{a}{(1-x)^2} - 2b(1-x) - \frac{4}{10}(1-x)^3$$

lo que nos deja:

$$y'(0) = a - 2b - \frac{2}{5} = 0$$

resolviendo el sistemas obtenemos:

$$a = \frac{1}{15}, \quad b = \frac{-1}{6}$$

con lo que la solución final es:

$$y(x) = \frac{1}{15(1-x)} - \frac{1}{6}(1-x)^2 + \frac{1}{10}(1-x)^4$$

□

Problema 2.14. Resuelva la ecuación diferencial

$$y'' - y = \frac{2}{\cosh^3 x} \qquad (E).$$

Para evitar escribir tantas exponenciales trabajaremos con las funciones

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{y} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Es fácil verificar que

$$\cosh'(x) = \sinh(x), \quad \sinh'(x) = \cosh(x), \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

Ahora resolvamos (E). Tenemos que la ecuación homogénea a resolver es

$$(D^2 - 1)y = 0.$$

La solución homogénea entonces es

$$y_h(x) = A_1 e^x + B_1 e^{-x},$$

pero dado que para encontrar una solución particular trabajaremos con la función $\cosh(x)$, resulta más conveniente reescribir la solución homogénea como

$$y_h(x) = A\cosh(x) + B\sinh(x).$$

Podemos hacer esto pues el espacio generado por las funciones $\{e^x, e^{-x}\}$ es el mismo que el generado por $\{\cosh(x), \sinh(x)\}$.

Para encontrar una solución particular usaremos el método de variación de constantes, por lo que buscamos una solución de la forma

$$y_p(x) = u(x)\cosh(x) + v(x)\sinh(x),$$

donde u, v son funciones que satisfacen el sistema

$$\begin{cases} u'(x)\cosh(x) + v'(x)\sinh(x) = 0 \\ u'(x)\sinh(x) + v'(x)\cosh(x) = \dfrac{2}{\cosh^3 x} \end{cases}$$

Se deduce que $u'(x) = -\dfrac{2\sinh(x)}{\cosh^3 x}$ y $v'(x) = \dfrac{2}{\cosh^2 x}$. Luego integramos:

$$\begin{aligned} u(x) &= -2\int_0^x \frac{\sinh(t)}{\cosh^3(t)}\,dt \\ &= \left.\frac{1}{\cosh^2(t)}\right|_0^x \\ &= \frac{1}{\cosh^2(x)} - 1 \\ &= -\tanh^2(x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} v(x) &= 2\int_0^x \frac{1}{\cosh^2(t)}\,dt \\ &= 2\int_0^x \underbrace{\operatorname{sech}^2(t)}_{\tanh'(t)}\,dt \\ &= 2\tanh(t)\Big|_0^x \\ &= 2\tanh(x). \end{aligned}$$

Finalmente la solución general de (E) es:

$$y(x) = A\cosh(x) + B\sinh(x) - \cosh(x)\tanh^2(x) + 2\sinh(x)\tanh(x) \qquad A, B \in \mathbb{R},$$

lo que es equivalente a

$$y(x) = A\cosh(x) + B\sinh(x) + \frac{\sinh^2(x)}{\cosh(x)} \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Problema 2.15.

(a) Resuelva

$$xy'' - y' = -\frac{2}{x} - \ln(x)$$

(b) Determine la solución del problema

$$xy'' + (x-1)y' - y = x^2 \ , \quad y(1) = 0,\ y'(1) = 1$$

sabiendo que $y(x) = e^{-x}$ es una solución de la ecuación homogénea asociada.

Solución:

(a) Primero resolveremos el problema homogéneo $xy'' - y' = 0$. Como se trata de una ecuación lineal de coeficientes no constantes, ocuparemos el Método del Reducción de Orden. Probamos con $y_1 = x^r$:

$$xr(r-1)x^{r-2} - rx^{r-1} = 0 \quad \longrightarrow \quad r(r-2) = 0$$

Notamos que esto se cumple tanto para $r = 0$ como para $r = 2$. Por lo tanto, inmediatamente de desprende que $y_1 = 1$ e $y_2 = x^2$. Así,

$$y_h(x) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 x^2$$

Ahora, empleamos variación de parámetros con

- $y_1 = 1$, con lo que ${y_1}' = 0$
- $y_2 = x^2$, con lo que ${y_2}' = 2x$
- $b = -\frac{2}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2}$

Así,

$$C_1{}' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ b(x) & 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix}} = \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{2} \quad \longrightarrow \quad C_1 = \ln(x) + \frac{x\ln(x)}{2} - \frac{x}{2}$$

$$C_2{}' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix}} = -\frac{1}{x^3} - \frac{\ln(x)}{2x^2} \quad \longrightarrow \quad C_2 = \frac{1}{2x^2} + \frac{\ln(x)}{22} + \frac{1}{2x}$$

El reemplazo queda propuesto al lector.

(b) Por el método de reducción de orden, buscamos otra solución de la EDO de la forma $y_2(x) = c(x)e^{-x}$. Reemplazando en la ecuación, obtenemos:

$$c'' - \frac{x+1}{x}c' = 0 \ , \quad x > 0$$

Al integrar obtenemos:

$$c(x) = c_1(x-1)e^x + c_2$$

Elegimos $c_2 = 0$ y $c_1 = 1$. Luego, la función $y_2(x) = (x-1)$ es solución de la ecuación homogénea y $W(y_1, y_2)(x) = xe^x \neq 0, x > 0$; por lo tanto, ambos soluciones son linealmente independientes.

Dado un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea, el método de variación de parámetros permite encontrar una solución particular:

$$y_p(x) = -e^{-x}\int (x-1)e^x\ dx + (x-1)\int dx = x^2 - 2x + 2$$

Con ello, la solución general es:

$$y(x) = \varepsilon_1 e^{-x} + \varepsilon_2(x-1) + x^2 - 2x + 2$$

La solución del PVI se consigue para los $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ que satisfacen el siguiente sistema: $\varepsilon_1 e^{-1} + 1 = 0$ y $-\varepsilon e^{-1} + c_2 = 1$; es decir,

$$y(x) = -e^{1-x} + x^2 - 2x + 2$$

□

Problema 2.16.

(a) Determine la solución general de $y^{(iv)} - y = e^t$

(b) Determine la solución general de

$$xy'' - (1+x)y' + y = x^2 e^{2x},$$

sabiendo que $y = e^x$ es solución de la ecuación homogénea asociada.

Solución:

(a) Calculamos la solución de la homogénea a través de su polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^4 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+i)(\lambda-i) = 0$. Así,

$$y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t + c_3\cos(t) + c_4\sin(t)$$

Para determinar la solución particular, aplicamos el método de coeficientes indeterminados usando el operador $(D-1)$:

$$\Big((D+1)(D-1)^2(D+i)(D-i)\Big)y_p = 0 \ \longrightarrow\ y_p(t) = a_1 e^{-t} + a_2 e^t + a_3 te^t + a_4\cos(t) + a_5\sin(t)$$

Sin pérdida de generalidad, hacemos $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0$, pues dichas soluciones están contenidas en la homogénea. Así, $y_p(t) = ate^t$. Si la introducimos en la ecuación original,

$$4ae^t + ate^t - ae^t = e^t \ \longrightarrow\ a = \frac{1}{4}$$

Con ello,

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} + c_3 \cos(t) + c_4 \sin(t) + \frac{te^t}{4}$$

(b) Reescribimos la ecuación diferencial:

$$y'' - \frac{1+x}{x} y' + \frac{1}{x} y = xe^{2x}$$

Buscamos $y_2(x) = c(x)e^x$ mediante el método de reducción de orden. Así, la ecuación para $c(x)$ queda como sigue:

$$c'' + \frac{x-1}{x} c' = u' + \frac{x-1}{x} u = 0$$

Como es lineal de primer orden en u, aplicamos factor integrante:

$$e^{\int p(x)\ dx} = e^{\int \frac{x-1}{x}\ dx} = e^{x+\ln(x)} = \frac{e^x}{x}$$

Así,

$$\left(\frac{e^x}{x} c'\right)' = 0 \implies \frac{e^x}{x} c' = 1 \implies c' = xe^{-x} \implies c(x) = -(x+1)e^{-x}$$

Por tanto, $y_2(x) = -(x+1)e^{-x}e^x = -(x+1)$ y por tanto

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2(x+1)$$

Para hallar y_p, empleamos variación de parámetros: $y_p(x) = u_1(x)e^x + u_2(x)(x+1)$

$$\begin{array}{ccccc} {u_1}' e^x & + & {u_2}'(x+1) & = & 0 \\ {u_1}' e^x & + & {u_2}' & = & xe^{2x} \end{array}$$

${u_1}' = -(x+1)e^x$, ${u_2}' = -e^{2x} \quad \implies \quad y_p = -\int (x+1)e^x\ dx\ e^x - \int e^{-2x}\ dx\ (x+1)$

y finalmente

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

□

2.4. Transformada de Laplace

Problema 2.17. Calcule la Transformada de Laplace de $\sin(\omega t)$ rápidamente sin usar integración por partes.

Solución: Recordemos que la definición de Transformada de Laplace (unilateral) esta dada por:

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Para resolver el problema solo basta usar la fórmula de Euler:

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t) \longrightarrow \text{Im } e^{i\omega t} = \sin(\omega t)$$

Luego:

$$\int_0^\infty \sin(\omega t)e^{-st}dt = \text{Im} \int_0^\infty e^{i\omega t}e^{-st}dt = \text{Im} \int_0^\infty e^{(i\omega - s)t}dt = \text{Im} \left.\frac{1}{i\omega - s}e^{(i\omega+s)t}\right|_0^\infty = \text{Im}\left\{-\frac{1}{i\omega - s}\right\}$$

Solo basta calcular la parte imaginaria de lo anterior, que esta claramente dada por:

$$-\text{Im}\,\frac{1}{i\omega - s} = -\text{Im}\,\frac{-i\omega - s}{\omega^2 + s^2} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} = F(s)$$

Esta solución solo es válida si $\text{Re}(s) > 0$ pues sino la integral anterior no converge. □

Problema 2.18. Calcule las transformadas inversas de las siguientes funciones en el dominio de Laplace:

(a) $G(s) = \dfrac{1}{s^3} + \dfrac{2}{s^2-7} + \dfrac{4s}{s^2+2} + \dfrac{e^{-2s}}{s}$

(b) $G(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s^2+2s-1}$

(c) $G(s) = \dfrac{1}{s^3(s^2+1)}$

(d) $G(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s^2+4)}$

Solución:

(a) Es directo de las definiciones de las transformadas de funciones usuales que:

$$\mathcal{L}^{-1}\{G\} = \frac{t^2}{2} + \frac{2}{\sqrt{7}}\sinh(\sqrt{7}t) + 4\cos(\sqrt{2}t) + H(t-2)$$

(b) Combinamos los dos teoremas de traslación. Como $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)H(t-a)$,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2-2}\right\} = e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2}\right\} = e^{-t}\,\frac{\sinh(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\{G\} = f(t-2)H(t-2) = e^{-(t-2)}\,\frac{\sinh(\sqrt{2}(t-2))}{\sqrt{2}}\,H(t-2)$$

(c) Aprovechando las propiedades de la transformada aplicada a la integral,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \int_0^t \sin(\tau)\ d\tau = 1-\cos(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = \int_0^t \Big(1-\cos(\tau)\Big)\ d\tau = t-\sin(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\} = \int_0^t \Big(\tau-\sin(\tau)\Big)\ d\tau = \frac{t^2}{2}-1+\cos(t)$$

(d) Notemos que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s^2+4)}\right\} = \frac{1}{2}\ \sin(2t)*e^t = \frac{1}{2}\int_0^t e^{t-u}\sin(2u)\ du = \frac{e^t}{5}-\frac{\cos(2t)}{5}-\frac{\sin(2t)}{10}$$

□

Problema 2.19. Resuelva el problema de Cauchy usando LT:

$$tx''-tx'+x=2 \qquad , \qquad x(0)=2,\ x'(0)=-1$$

para $t>0$.

Solución: Para ello necesitamos recordar un par de propiedades. Sea $F(s)$ la transformada de Laplace de $f(t)$, entonces:

(a) Derivada en el dominio del tiempo:

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = sF(s)-f(0) \quad , \quad \mathcal{L}(f''(t))(s) = s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$

podemos generalizarlo de la forma:

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s) = s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k}f^{(k)}(0)$$

donde $f^{(0)}(0)=f(0)$.

(b) Derivada en el dominio de Laplace:

$$\mathcal{L}(t\cdot f(t))(s) = -\frac{d}{ds}F(s)$$

Para el problema y poniendo $X(s)=\mathcal{L}(x(t))(s)$ tenemos:

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s^2X-sx(0)-x'(0) = s^2X-2s+1$$

y

$$\mathcal{L}(f')(s) = sX-x(0) = sX-2$$

Aplicando LT al problema queda:

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2X - 2s + 1\right) - \ -\frac{d}{ds}(sX - 2) + X = \frac{2}{s}$$

Reordenando llegamos:

$$X' + \frac{2}{s}X = \frac{1}{s^2}$$

Esta es una ecuación lineal que se resuelve como siempre usando el factor integrante:

$$\mu(s) = e^{\int P(s)ds} = e^{\int 2/sds} = s^2$$

Luego:

$$(s^2X) = \int s^2\frac{1}{s^2} = s + C \to X(s) = \frac{C}{s^2} + \frac{1}{s} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{C}{s}\right) + \frac{2}{s}$$

Necesitamos calcular

$$\mathcal{L}^{-1}(X(s))(t) = \mathcal{L}^{-1}(X(s))(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{d}{ds}\left(\frac{C}{s}\right) + \frac{2}{s}\right)(t) = Ct + 2$$

Estamos omitiendo la función Heaviside (escalón) ($H(t),\ u(t),\ \theta(t),\ \ulcorner(t)$) pues esto solo es válido para $t > 0$. Para encontrar C usamos que $x'(0) = -1$ pues la condición $x(0) = 2$ no entrega nada, y obtenemos $C = -1$, por lo tanto:

$$x(t) = 2 - t$$

es la solución final.

□

Problema 2.20. Resuelva la ecuación integral

$$y(t) = -2\int_0^t (t-\tau)y(\tau)d\tau + H(t-2) + 1,$$

donde $H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$

Solución: Reescribimos la ecuación como:

$$y = -2t * y + H_2(t) + 1$$

Y aplicamos la transformada de Laplace:

$$Y = \frac{-2Y}{s^2} + \frac{e^{-2s} + 1}{s}$$

Despejando Y:

$$Y = \frac{se^{-2s} + s}{s^2 + 2}$$

Aplicando la transformada de Laplace inversa:

$$y(t) = \cos(\sqrt{2}(t-2))H_2(t) + \cos(\sqrt{2}t)$$

□

Problema 2.21. Resuelva la ecuación

$$\int_0^t y(t-\tau)\Big(y(\tau)-1-e^{\tau}\Big)\,d\tau = e^t - 1\ , \quad t \geq 0$$

Solución: Sea $Y(s)=\mathcal{L}\{y(t)\}$. Aplicando LT obtenemos:

$$Y(s)^2 - Y(s)\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}\right) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \quad \longrightarrow \quad Y(s)^2 - Y(s)\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}\right) - \frac{1}{s(s-1)} = 0$$

y con ello:

$$\left(Y(s)-\frac{1}{s}\right)\left(Y(s)-\frac{1}{s-1}\right)=0$$

Por lo tanto, hay dos soluciones:

$$y(t)=1 \qquad \vee \qquad y(t)=e^t\ , \qquad t \geq 0$$

□

Problema 2.22. Resuelva el problema de valor inicial

$$x''(t)+4x(t)=\sin(2t)+\delta(t-4\pi), \quad x(0)=x'(0)=1,$$

donde $\delta(t)$ es la función de Dirac.

Solución: La ecuación es:

$$x''+4x=\sin(2t)+\delta(t-4\pi), \quad x'(0)=x(0)=1$$

Entonces aplicamos nuevamente la transformada de Laplace:

$$s^2X - sx(0) - x'(0) + 4X = \frac{2}{s^2+4} + e^{-4\pi s}$$

Despejando X:

$$X = \frac{2}{(s^2+4)^2} + \frac{e^{-4\pi s}+s+1}{s^2+4}$$

Aplicando la transformada de Laplace inversa:

$$x(t) = \frac{1}{2}(\sin(2t)*\sin(2t)) + \frac{1}{2}(H_{4\pi}(t)+1)\sin(2t)+\cos(2t)$$

□

Problema 2.23. Considere la función:

$$F(s)=\frac{s^2+2s+e^{-s}}{s(s^2+2s-1)}$$

Suponga que $y(t)$ es una función continua cuya transformada de Laplace coincide con F.

(a) Determine una ecuación diferencial con segundo miembro continuo y condiciones iniciales $y(0)=a$, $y'(0)=b$ con $a^2+b^2\neq 0$ tal que $y(t)$ sea su solución.

(b) Determine la función $y(t)$.

Solución: El trinomio (s^2+2s-1) se factoriza como $(s+1+\sqrt{2})(s+1-\sqrt{2})$ Entonces tenemos que:

$$\frac{1}{s^2+2s-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{s+1-\sqrt{2}} - \frac{1}{s+1+\sqrt{2}}\right)$$

que es la transformada de

$$g(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{-(1-\sqrt{2})t} - e^{-(1+\sqrt{2})t}\right)$$

Nótese que $g(0)=0$. Para esta función la transformada de su derivada es:

$$\mathcal{L}\{g'\}(s) = \frac{s}{s^2+2s-1}$$

Y su convolución con $H_1(t)$ es

$$g(t) * H_1(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}\left(1-e^{-(1-\sqrt{2})(t-1)}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}\left(1-e^{-(1+\sqrt{2})(t-1)}\right) H_1(t)$$

Por lo tanto, si $\mathcal{L}\{y\}(s) = F(s)$, la función continua $y(t)$ es

$$y(t) = g'(t) + 2g(t) + H_1(t) * g(t) \quad ; \quad (t \geq 0)$$

En este caso, $y(0) = g'(0) = 1$ y $y'(0) = g''(0) + 2g(0) = 0$, que corresponden a los valores de a y b solicitados. El operador diferencial que interviene en la ecuación está sugerido por el trinomio se segundo grado antes analizado. Es decir el problema con valores iniciales es:

$$\begin{cases} y'' + 2y' - y = H_1(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

□

Problema 2.24. Use la transformada de Laplace para resolver las siguientes ecuaciones

(a) $y' - 5y = 0; y(0) = 2$.

Solución: Tomando la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación obtenemos

$$\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} - 5\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{0\right\},$$

mientras que $\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} = sY(s) - y(0)$, $\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} = Y(s)$ y $\mathcal{L}\left\{0\right\} = 0$, con lo cual obtenemos

$$sY(s) - 2 - 5Y(s) = 0,$$

de donde $Y(s) = \dfrac{2}{s-5}$. Para concluir tomamos la transformada de Laplace inversa y obtenemos

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-5}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\} = 2e^{5t}.$$

□

(b) $y' + y = \sin 2t$; $y(0) = 1$

Solución: Tomando Transformada de Laplace en ambos lados obtenemos

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = \mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4},$$

despejamos para obtener

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)(s^2+4)}.$$

Ahora tomamos transformada de Laplace inversa

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)(s^2+4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)(s^2+4)}\right\}.$$

Notamos que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}$ y para determinar el otro término es conveniente separar usando fracciones parciales (un método alternativo consiste en usar el producto de convolución). Tenemos

$$\frac{2}{(s+1)(s^2+4)} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{s^2+4} - \frac{2}{5}\cdot\frac{s}{s^2+4},$$

luego por linealidad se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)(s^2+4)}\right\} &= \frac{1}{5}\left(2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}\right)\\ &= \frac{1}{5}(2e^{-t} + \sin 2t - 2\cos 2t).\end{aligned}$$

Finalmente

$$y(t) = \frac{1}{5}(7e^{-t} + \sin 2t - 2\cos 2t).$$

□

(c) $y'' - y' - 2y = 4x^2$; $y(0) = 1, y'(0) = 4$.

Solución: Tomando transformada de Laplace obtenemos

$$\mathcal{L}\left\{y''(x)\right\} - \mathcal{L}\left\{y'(x)\right\} - 2\mathcal{L}\{y(x)\} = 4\mathcal{L}\left\{x^2\right\}.$$

Tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{y''(x)\right\} &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s - 4\\ \mathcal{L}\left\{y'(x)\right\} &= sY(s) - y(0) = sY(s) - 1\\ \mathcal{L}\left\{x^2\right\} &= \frac{\Gamma(3)}{s^3} = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3}.\end{aligned}$$

luego de reemplazar en la ecuación y despejar obtenemos

$$Y(s) = \frac{s+3}{s^2-s-2} + \frac{8}{s^3(s^2-s-2)}.$$

Usando fracciones parciales se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s-2)(s+1)}\right\} &= \frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \\ &= \frac{5}{3}e^{2x} - \frac{2}{3}e^{-x}\end{aligned}$$

Y para el otro término:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8}{s^3(s-2)(s+1)}\right\} &= -3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{8}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \\ &= -3 + 2x - 2x^3 + \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{8}{3}e^{-x}.\end{aligned}$$

Finalmente

$$y(x) = -3 + 2x - 2x^3 + 2e^{2x} + 2e^{-x}.$$

□

(d) $y'' - 2y' + y = f(x)$; $y(0) = 0, y'(0) = 0$. Donde f es una función que posee transformada de Laplace.

Vamos a tomar transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación y denotaremos por $F(s)$ a $\mathcal{L}\{f(x)\}$. Obtenemos

$$[s^2Y(s) - (0)s - 0] - 2[sY(s) - 0] + Y(s) = F(s),$$

con lo cual

$$Y(s) = \frac{F(s)}{(s-1)^2}.$$

Usamos el hecho de que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = x$ y la propiedad de traslación que en general es

$$\mathcal{L}\{e^{ax}g(x)\} = G(s-a),$$

con lo cual

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} = xe^x.$$

Luego tenemos

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\cdot\frac{1}{(s-1)^2}\right\} = f(x) * xe^x = \int_0^x te^t f(x-t)\,dt.$$

□

Problema 2.25. Sea

$$F(s) = \frac{s^2 + 1 + 2s + e^{-s}}{s(s^2 + 2s - 1)}\ , \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Determine una ecuación diferencial con condiciones iniciales $y(0) = a$, $y'(0) = b$ con $a^2 + b^2 \neq 0$ tal que $y(t)$ sea su solución.

Solución: Consideremos la ecuación $y'' + Ay' + By = g(t)$. Aplicando la transformada de Laplace, obtenemos que:

$$(s^2 + As + B)Y(s) - sy(0) - y'(0) - Ay(0) = G(s)$$

Reagrupando y reemplazando,

$$Y(s) = \frac{sa + b + Aa + G(s)}{s^2 + As + B} = \frac{sa + b + Aa}{s^2 + As + B} + \frac{G(s)}{s^2 + As + B} = \frac{s^2 + 1 + 2s + e^{-s}}{s(s^2 + 2s - 1)}$$

Comparando con la ecuación, podemos tomar $s+2 = sa+b+Aa$, $A = 2$, $B = -1$, $G(s) = \dfrac{1 + e^{-s}}{s}$. Entonces, $a = 1, b = 0, g(t) = 1 + H(t-1)$. La ecuación es:

$$y'' + 2y' - y = 1 + H(t-1) \ , \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 0$$

$\square$

Problema 2.26. Resuelva, con la transformada de Laplace, el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = te^{2t} \\ \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Solución: Aplicando la Transformada de Laplace a la ecuación:

$$s^2F(s) - \Big(y'(0) + sy(0)\Big) + 2sF(s) - 2y(0) + F(s) = \frac{1}{(s-2)^2}$$

Aplicando las condiciones iniciales se obtiene que:

$$F(s)\Big(s^2 + 2s + 1\Big) = \frac{1}{(s-2)^2} + s + 2 \quad \longrightarrow \quad F(s) = \underbrace{\frac{1}{(s+1)^2(s-2)^2}}_{F_1(s)} + \underbrace{\frac{s+2}{(s+1)^2}}_{F_2(s)}$$

Expandimos $F_1(s)$ en fracciones parciales:

$$\frac{1}{(s+1)^2(s-2)^2} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{(s+1)^2} + \frac{c}{s-2} + \frac{d}{(s-2)^2}$$

La solución del sistema de ecuaciones asociado al desarrollo en fracciones parciales queda propuesto al lector. Finalmente,

$$F_1(s) = \frac{2/27}{s+1} + \frac{1/9}{(s+1)^2} - \frac{2/27}{s-2} + \frac{1/9}{(s-2)^2}$$

De lo anterior, es inmediato que:

$$f_1(t) = \frac{2}{27}\ e^{-t} + \frac{1}{9}\ te^{-t} - \frac{2}{27}\ e^{2t} + \frac{1}{9}\ te^{2t}$$

Para $F_2(s)$, repetimos el proceso:

$$\frac{s+1}{(s+1)^2} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

y con ello

$$f_2(t) = e^{-t} + te^{-t}$$

Por lo tanto, la función buscada es:

$$y(t) = \frac{29}{27}\, e^{-t} + \frac{10}{9}\, te^{-t} - \frac{2}{27}\, e^{2t} + \frac{1}{9}\, te^{2t}$$

□

Problema 2.27. Resolver la ecuación diferencial:

$$2y'' + y' + 2y = \begin{cases} 1 & , \text{si } 5 \leq t < 20 \\ 0 & , \text{en otros casos} \end{cases}$$

Sujeta a las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Solución: Utilizando la función de Heaviside, $H(t-a)$, la ecuación queda como sigue:

$$2y'' + y' + 2y = H(t-5) - H(t-20)$$

Aplicando LT y utilizando las condiciones iniciales,

$$Y(s)\Big(2s^2 + s + 2\Big) = \frac{e^{-5s} - e^{-20s}}{s} \quad \longrightarrow \quad Y(s) = (e^{-5s} - e^{-20s})\left(\frac{1}{s(2s^2+s+2)}\right)$$

Ahora, para resolver la inversa, consideremos:

$$G(s) = \frac{1}{s(2s^2+s+2)} \qquad \wedge \qquad g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

Con lo anterior se tendrá que:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(e^{-5t} - e^{-20t})G(s)\} = H(t-5)g(t-5) - H(t-20)g(t-20)$$

Por lo tanto, basta resolver la inversa de $G(s)$ para obtener la solución al problema. Utilicemos fracciones parciales:

$$G(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{2s^2+s+2} = \frac{1/2}{s} - \frac{s + 1/2}{2s^2+s+2}$$

La fracción de la derecha se debe reescribir para poder asociarla a alguna función conocida:

$$G(s) = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2}\, \frac{\left(s + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}}$$

Aplicando la inversa, obtenemos que:

$$g(t) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-t/4}}{2}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{15}\, t}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{15}} \sin\left(\frac{\sqrt{15}\, t}{4}\right)\right]$$

El reemplazo final queda propuesto al lector.

□

Problema 2.28. Resuelva el problema de valor inicial:

$$2y'' + y' + 2y = \delta(t-5)\ , \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

Solución: Aplicando LT a la ecuación,

$$\Big(2s^2 + s + 2\Big)Y(s) = e^{-5s} \quad \longrightarrow \quad Y(s) = e^{-5s}\ \frac{1}{2s^2+s+2}$$

Reescribimos el lado derecho para reconocerlo como una transformada conocida:

$$Y(s) = \frac{1}{2}\ e^{-5s}\ \frac{1}{s^2+s/2+1} = \frac{1}{2}\ e^{-5s}\ \frac{1}{(s+1/4)^2+15/16} = \frac{2}{\sqrt{15}}\ e^{-5s}\ \frac{\sqrt{15}/4}{(s+1/4)^2+15/16}$$

Para resolver la inversa, hacemos que:

$$G(s) = \frac{\sqrt{15}/4}{(s+1/4)^2+15/16} \quad \longrightarrow \quad g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = e^{-t/4}\ \sin\left(\frac{\sqrt{15}\ t}{4}\right)$$

Entonces,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-5s}G(s)\right\} = H(t-5)g(t-5) = \begin{cases} 0 & ,\ t<5 \\ e^{-(t-5)/4}\sin\left(\frac{\sqrt{15}\ (t-5)}{4}\right) & ,\ e.o.c. \end{cases}$$

Finalmente,

$$y(t) = \begin{cases} 0 & ,\ t<5 \\ \dfrac{2}{\sqrt{15}}\ e^{-(t-5)/4}\sin\left(\dfrac{\sqrt{15}\ (t-5)}{4}\right) & ,\ e.o.c. \end{cases}$$

□

Problema 2.29. Resuelva la ecuación integral:

$$\int_0^t x(t-u)\ (x(u) - 1 - e^u)du = 1 - e^t \qquad t \geq 0$$

Solución: Note que el lado izquierdo puede escribirse como:

$$\int_0^t x(t-u)x(u)du - \int_0^t x(t-u)du - \int_0^t x(t-u)e^u du = x(t) * x(t) - x(t) * 1 - x(t) * e^t$$

con lo que el problema ahora es mucho mas amigable. Usando LT a ambos lados y usando la propiedad de la convolución y las tablas, y poniendo $\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = X(s)$ tenemos:

$$X^2 - \frac{X}{s} - \frac{X}{s-1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} = \frac{-1}{s(s-1)}$$

agrupando términos tenemos:

$$X^2 - X\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}\right) + \frac{1}{s(s-1)} = \left(X - \frac{1}{s}\right)\left(X - \frac{1}{s-1}\right) = 0$$

de donde se tiene 2 posibles valores para $X(s)$ y por ende dos soluciones:

$$X_1(s) = \frac{1}{s} \longrightarrow x_1(t) = 1$$

y

$$X_2(s) = \frac{1}{s-1} \longrightarrow x_2(t) = e^t$$

$\square$

Problema 2.30. La posición $x(t)$ de un cuerpo de masa $m = 1$ (Kg) atado a un resorte amortiguado tiene por ecuación:

$$x'' + 2x' + 2x = f(t)$$

Suponga que el cuerpo se pone en movimiento en el punto de equilibrio con velocidad $v_0 = -4$ (m/seg) y que el cuerpo está sujeto a un golpe de impulso unitario en $t = 1$ y desde $t = 2$ hasta $t = 3$ se le aplica una fuerza constante igual a 1 (Newton). Determine la posición del cuerpo en el instante t.

Solución: La ecuación diferencial corresponde a:

$$x'' + 2x' + 2x = \delta(t-1) + H(t-2) - H(t-3)$$

Con condiciones iniciales:

$$x(0) = 0 \quad ; \quad x'(0) = -4$$

Por lo que aplicamos Transformada de Laplace para así obtener:

$$(s^2 + 2s + 2)X(s) + 4 = e^{-s} + \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s}$$

Entonces despejando $X(s)$ tenemos:

$$X(s) = -\frac{4}{s^2+2s+2} + \frac{e^{-s}}{s^2+2s+2} + \frac{e^{-2s}}{s(s^2+2s+2)} - \frac{e^{-3s}}{s(s^2+2s+2)}$$

Para resolver esto, requerimos de las transformadas inversas de $\frac{1}{s^2+2s+2}$ y de $\frac{1}{s(s^2+2s+2)}$, las cuales son:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s+2}\right\} = e^{-t}\sin(t)$$

Usando propiedades de transformadas obtenemos la otra:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+2s+2)}\right\} = \int_0^t e^{-x}\sin(x)dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t}(\cos(t) + \sin(t))$$

Ahora considerando los retardos que entrega cada exponencial en las transformadas, se tiene que la solución a la edo es:

$$x(t) = -4e^{-t}\sin(t) + e^{-(t-1)}\sin(t-1)H(t-1) + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-(t-2)}(\cos(t-2) + \sin(t-2))\right] H(t-2)$$

$$- \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-(t-3)}(\cos(t-3) + \sin(t-3))\right] H(t-3)$$

□

Problema 2.31. Considere un sistema masa-resorte con $m = 1$, $c = 5$ y $k = 6$ que parte del reposo desde el punto de equilibrio sujeto a una fuerza externa $f(t)$. Escriba la posición de la masa como una convolución.

Solución: Debemos resolver la ecuación diferencial

$$x'' + 5x' + 6x = f(t)\ , \quad x(0) = x'(0) = 0$$

Aplicando LT, obtenemos:

$$\left(s^2 + 5s + 6\right)X(s) = F(s) \quad \longrightarrow \quad X(s) = \frac{F(s)}{s^2 + 5s + 6}$$

Como

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 5s + 6}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}\right\} = e^{-2t} - e^{-3t}$$

tenemos que

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \left(e^{-2t} - e^{-3t}\right) * f(t) = \int_0^t \left(e^{-2\tau} - e^{-3\tau}\right)f(t-\tau)\ d\tau$$

□

2.5. Series de Potencias

Problema 2.32. Si $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, ¿a qué corresponde $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 a_n x^n$?.

Solución: Hay que notar que en la serie el término general está multiplicado por una potencia de n, esto se puede obtener derivando la serie de potencia original, pero teniendo cuidado de que cada vez que se deriva, multiplicar la por x para recuperar un término que incluya x^n.

Considerando esto, para obtener esa expresión habría que derivar la serie, multiplicar por x, luego derivar otra vez más, multiplicar por x nuevamente, derivar por tercera y última vez, y finalmente multiplicar todo por x, matemáticamente se expresaría como:

$$x(x(xf'(x))')' = x^3 f^{(3)}(x) + 3x^2 f''(x) + xf'(x)$$

□

Problema 2.33. Definimos la función de Bessel de primera especie y orden p como:

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

Demuestre para $p = 0$ que $y = J_p(x)$, satisface la ecuación diferencial:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

Solución: Derivamos dos veces a $J_0(x)$ y obtenemos que:

$$J_0'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{n!(n-1)!2^{2n-1}}$$

$$J_0''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-2}(2n-1)}{n!(n-1)!2^{2n-1}}$$

Reemplazamos en la ecuación diferencial:

$$x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-2}(2n-1)}{n!(n-1)!2^{2n-1}} + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{n!(n-1)!2^{2n-1}} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}} = 0$$

Reordenando los términos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} 2n}{n!(n-1)!2^{2n-1}} \underbrace{- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!(n-1)!2^{2n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!(n-1)!2^{2n-1}}}_{=0} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(n!)^2 2^{2n}} = 0$$

$$x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} 2n}{n!(n-1)!2^{2n-1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(n!)^2 2^{2n}} = 0$$

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}(2n+2)}{n!(n+1)!2^{2n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(n!)^2 2^{2n}}}_{=0} = 0$$

Para $p > 0$ se procede de forma análoga, teniendo cuidado con el subíndice de la sumatoria al derivar (el subíndice debe ser tal que no hayan términos x^m con $m < 0$).

$\square$

Problema 2.34. Suponiendo una solución del tipo $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $y' + \alpha y = 0$

(b) $(1 - x^2)y'' + 2y = 0$

(c) $y'' + xy' + y = 0$

Solución:

(a) Derivando la serie una vez, obtenemos que $y' = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, entonces reemplazamos en la ecuación diferencial y desarrollamos para igualar los exponentes de x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) a_{n+1} + \alpha a_n] x^n = 0$$

Para que se cumpla esa igualdad, es necesario que todo lo que multiplica a cada x^n valga 0, entonces obtenemos la siguiente relación de recurrencia:

$$(n+1) a_{n+1} + \alpha a_n = 0$$

Que es lo mismo que:

$$a_{n+1} = \frac{-\alpha}{n+1} a_n$$

De esto determinamos que el término general es:

$$a_n = \frac{(-\alpha)^n}{n!} a_0$$

Con esto la solución de la ecuación diferencial queda como:

$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n x^n}{n!} = a_0 e^{-\alpha x}$$

Siendo a_0 una constante arbitraria.

$\square$

(b) Si consideramos que $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, entonces al derivar dos veces tenemos $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$, reemplazando en la ecuación diferencial y acomodando los términos hasta igualar el exponente de los x:

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n + 2a_n]x^n = 0$$

Para que se cumpla esa igualdad, es necesario que todo lo que multiplica a cada x^n valga 0, entonces obtenemos la siguiente relación de recurrencia:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n + 2a_n = 0$$

Que es lo mismo que:

$$a_{n+2} = \frac{n^2-n-2}{(n+2)(n+1)}a_n = \frac{n-2}{n+2}a_n$$

Entonces separando para los n pares e impares, se llega a que:

$$a_2 = -a_0 \quad , \quad a_4 = 0 \cdot a_2 = 0 \quad , \quad a_6 = a_8 = a_1 0 = \cdots = 0$$

$$a_{2n+1} = \frac{2n-3}{2n+1}a_{2n-1} = \frac{2n-3}{2n+1}\cdot\frac{2n-5}{2n-1}\cdot\frac{2n-7}{2n-3}\cdots\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{(-1)}{3}a_1 = \frac{-1}{(2n+1)(2n-1)}a_1$$

Por lo tanto la serie correspondiente a y puede expresarse de la siguiente forma:

$$y = a_0(1-x^2) - a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{(2n+1)(2n-1)}x^{2n+1}$$

Donde a_0 y a_1 son constantes arbitrarias.

□

(c) Derivando dos veces la serie obtenemos expresiones para y, y' e y'':

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad ; \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad ; \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

Entonces reemplazamos en la ecuación diferencial y desarrollamos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Para que se cumpla esa igualdad, es necesario que todo lo que multiplica a cada x^n valga 0, entonces obtenemos la siguiente relación de recurrencia:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n = 0$$

Que es lo mismo que:

$$a_{n+2} = \frac{-1}{n+2}a_n$$

Separando para n par e impar, la expresión general quedaría como sigue:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}a_0 \quad (n>0) \quad ; \quad a_{2n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}a_1$$

Entonces la serie que representa a y sería:

$$y = a_0\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right) + a_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$$

Donde a_0 y a_1 son constantes arbitrarias.

□

Problema 2.35. Resolver el problema con valores iniciales

$$\begin{cases} x'' + 2tx + 2x = 0 \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Solución: Supongamos que existe una solución de la forma $\varphi(t)$ del problema anterior y que además su derivada se puede calcular derivando término a término la serie de término general $a_n t^n$:

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \\
\varphi'(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}t^n \\
\varphi''(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n
\end{aligned}$$

Reemplazando las series en la ecuación, obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}t^{n+1} + 2\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}na_n t^n + 2\sum_{n=1}^{\infty}a_n t^n = 0$$

Razonamos de la siguiente manera: la parte izquierda de la ecuación anterior es una serie de potencias de t; el derecho, es también una serie de potencias de t, donde todos los coeficientes son nulos. La única posibilidad de que esto ocurra es que los coeficientes de t^n en la serie de la izquierda y en la derecha sean iguales. En consecuencia,

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + 2na_n + 2a_n = 0, \ (n \geq 0)$$

De la relación anterior se obtiene que:

$$a_{n+2} = -\frac{2a_n}{n+2}, \ (n \geq 0)$$

Para calcular todos los coeficientes bastará entonces conocer dos de ellos: a_0 y a_1. Usando las condiciones iniciales, se observa que $\varphi(0) = a_0 = 1$, $\varphi'(0) = a_1 = 0$. Así, es claro que todos los coeficientes con sub-índices impares son nulos y si $n = 2m$ es un coeficiente con sub-índice par, entonces

$$a_{2(m+1)} = -\frac{a_{2m}}{m+1} \quad \longrightarrow \quad a_{2(m+1)} = (-1)^{m+1}\frac{1}{(m+1)!}, \ (m \geq 0)$$

Finalmente, la solución buscada es

$$\varphi(t) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{t^{2m}}{m!}$$

□

2.6. Modelos y problemas físicos

Problema 2.36. Considere el movimiento armónico amortiguado y sometido a un forzamiento periódico externo:

$$x'' + \beta x' + \omega^2 x = F_0 \sin(\alpha t)$$

Encontrar su solución general y la solución a la cual tiende ésta cuando t crece (solución periódica estable).

Solución:

La ecuación característica es $\lambda^2 + \beta\lambda + \omega^2 = 0$, cuyas soluciones son $\dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\omega^2}}{2}$, por lo que hay oscilaciones si $\beta < 2\omega$ (es decir la parte compleja de las soluciones es no nula).
Para dicho caso, la solución a la ecuación homogénea es

$$y_h = (C_1 \cos(\sigma t) + C_2 \sin(\sigma t))e^{-\frac{\beta t}{2}}$$

Donde $\sigma = \dfrac{\sqrt{4\omega^2 - \beta^2}}{2}$.
Ahora suponemos una solución particular de la forma $y_p = A\cos(\alpha t) + B\sin(\alpha t)$, derivando y reemplazando en la ecuación, despejamos que la solución particular es:

$$y_p = \frac{F_0}{(\omega^2 - \alpha^2)^2 + \alpha^2\beta^2}(-\alpha\beta\cos(\alpha t) + (\omega^2 - \alpha^2)\sin(\alpha t))$$

Luego se tiene que $y = y_h + y_p$ y al crecer t, y tiende a la solución periódica y_p.

□

Problema 2.37. Un cilindro vertical de altura h y radio R, está cerrado por su extremidad inferior (o base) y tiene empotrado un resorte de coeficiente de elasticidad k y largo $\ell < h$ en reposo. El cilindro está lleno de un líquido viscoso que opone un roce proporcional a la velocidad de desplazamiento en su interior, según una constante de proporcionalidad λ.
En el instante inicial se contrae totalmente el resorte y sobre su extremidad libre, se adhiere una esfera de masa m y radio r, siendo $r < R$ y $r < h/2$.

(a) Plantee las ecuaciones del movimiento de la esfera cuando el resorte se extiende y establezca las condiciones para que la esfera quede oscilando dentro del cilindro.

(b) ¿Qué relación deben cumplir las constantes m, h, k, λ, r, R y ℓ para que la esfera aflore apenas fuera del cilindro al extenderse el resorte? (Lo anterior significa que sólo un punto de la esfera alcanza la superficie del líquido).

Solución:

(a) Colocando el origen de coordenadas en la base del cilindro, llamamos $x(t)$ a la posición de la extremidad superior del resorte. Según la segunda ley de Newton obtenemos

$$mx'' = k(\ell - x) - mg - \lambda x' \quad ; \quad x(0) = 0 \quad ; \quad x'(0) = 0$$

Es decir, el problema con valores iniciales a resolver es:

$$\begin{cases} x'' + \frac{\lambda}{m}x' + \frac{k}{m}x = \frac{k\ell}{m} - g \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

La ecuación característica correspondiente a la ecuación homogénea es:

$$s^2 + \frac{\lambda}{m}s + \frac{k}{m} = 0$$

Para que exista un comportamiento oscilatorio, es necesario y suficiente que las raíces sean complejas conjugadas lo que significa que:

$$\Delta = \left(\frac{\lambda}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m} < 0$$

Lo que vendría a ser la condición para que la esfera oscile dentro del cilindro. □

(b) Para continuar, bajo las condiciones anteriores, la solución general de la ecuación de movimiento se escribe como:

$$\varphi(t) = e^{-\frac{\lambda}{2m}t}\left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right)\right] + \varphi_p(t)$$

Por simple inspección podemos notar que $\varphi_p = \ell - mg/k$. Utilizando las condiciones iniciales se llega a la solución de la ecuación, la cual es:

$$\varphi(t) = \left(\ell - \frac{mg}{k}\right)\left[1 - e^{-\frac{\lambda}{2m}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right) + \frac{\lambda}{m\sqrt{-\Delta}}\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right)\right)\right]$$

Notamos que la derivada de esta función es:

$$\varphi'(t) = \frac{\lambda^2 - 2km}{m^2\sqrt{-\Delta}}\left(\ell - \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{\lambda}{2m}t}\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right)$$

Esta derivada se anula en todos los puntos t de la forma $t_n = 2n\pi/\sqrt{-\Delta}$, con $n \in \mathbb{Z}$. Para que la esfera aflore según las condiciones del problema, se debe cumplir para $T = 2\pi/\sqrt{-\Delta}$. Entonces:

$$\begin{cases} \varphi(T) = h - 2r \\ \varphi'(T) = 0 \end{cases}$$

La segunda condición es obvia dada la elección de T, pero de la primera condición podemos obtener la siguiente relación:

$$\varphi(T) = \left(\ell - \frac{mg}{k}\right)\left[1 - e^{-\frac{\lambda}{2m}T}\right] = h - 2r$$

Es decir la condición que deben cumplir los parámetros del problema es:

$$\ell = \frac{h - 2r}{1 - e^{-\frac{\lambda}{2m}T}} + \frac{mg}{k}$$

□

Problema 2.38. Se dispone de un plano inclinado cuya longitud total es L y que forma un ángulo θ con respecto a la horizontal. En el vértice de ese ángulo se ha colocado un tubo que reposa sobre el plano inclinado y contiene un resorte empotrado por su extremidad inferior, de largo ℓ y coeficiente de elasticidad lineal $k = 1$. En el instante inicial el resorte está completamente comprimido y sostiene una esfera de masa $m = 1$ en su extremidad libre. Tomamos como origen de coordenadas la posición del centro de masa de la esfera en ese momento (resorte completamente comprimido). Se suelta la esfera y es empujada hacia arriba por el plano debido a la acción del resorte. Un tope puesto en el tubo impide que el resorte se estire en una magnitud superior a ℓ. Llame $x(t)$ a la posición del centro de masa de la esfera en el instante t.

(a) Plantear las ecuaciones del movimiento en ausencia de roce. Establezca una primera condición entre las magnitudes ℓ y θ para que la esfera avance empujada por el resorte.

(b) Determinar el tiempo T_1 necesario para que la esfera se despegue del resorte.

(c) ¿Qué relación deben cumplir ℓ, θ y L para que la esfera, separándose del resorte, alcance en su movimiento la extremidad superior del plano inclinado y caiga verticalmente enseguida?

Solución:

(a) Llamamos T_1 el tiempo en que la esfera se despega del resorte, T_2 el tiempo en que alcanza el borde superior del plano y empieza su caída libre. Tenemos dos situaciones distintas:

(i) Para $0 < t < T_1$, las fuerzas que actúan son las del resorte y la componente del peso $mg\sin(\theta)$ en la dirección del plano, orientada hacia abajo. Teniendo en cuenta los valores de las constantes, la ecuación de Newton se escribe:

$$x'' = 1 \times (\ell - x) - g\sin(\theta)$$

Tenemos entonces un primer problema con valores iniciales:

$$\begin{cases} x'' + x = \ell - g\sin(\theta) \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Llamando $A = \ell - g\sin(\theta)$, para que la esfera avance, es necesario que $A \leq 0$. Es decir, se debe cumplir la condición:

$$\ell - g\sin(\theta) \leq 0$$

Esta condición se supone satisfecha en lo que sigue y, como θ debe ser un ángulo del primer cuadrante, debe cumplir que:

$$\theta \leq \arcsin\left(\frac{\ell}{g}\right)$$

(ii) Para $T_1 < t < T_2$, sólo actúa la fuerza $-g\sin(\theta)$, luego se tiene el problema con valores iniciales:

$$\begin{cases} x'' = -g\sin(\theta) \\ x(T_1) = \ell \\ x'(T_1) = x'(T_1)- \end{cases}$$

Donde $x'(T_1)-$ es la velocidad del móvil que se calcula al llegar a T_1 usando la ecuación anterior.

$\square$

(b) Procedemos a resolver el primer problema con valores iniciales. Dado que la ecuación característica de la ecuación homogénea es $\lambda^2 + 1 = 0$, la solución general de la ecuación homogénea es de la forma:

$$y_h = c_1 \cos t + c_2 \sin t + A$$

Y una solución particular de la no homogénea es fácil de obtener por inspección: basta reemplazar la constante A. Luego la solución general se escribe en la forma

$$\varphi(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

Luego, usando las condiciones iniciales se encuentra $c_1 = -A$, $c_2 = 0$, de modo que

$$\varphi(t) = A(1 - \cos(t))$$

Es la solución al primer problema de valores iniciales.
Para encontrar T_1 hacemos $\varphi(T_1) = \ell$ obteniendo:

$$T_1 = \arccos\left(1 - \frac{\ell}{A}\right)$$

Nótese que la velocidad en ese tiempo es entonces

$$\varphi'(T_1) = A\sin(T_1) = \sqrt{\ell^2 - 2\ell g \sin(\theta)}$$

$\square$

(c) Resolvamos ahora el segundo problema con valores iniciales. Nótese que para que la esfera siga avanzando después del tiempo T_1 se necesita que su velocidad en ese instante sea estrictamente positiva, es decir, usando el cálculo final de la pregunta anterior, se debe cumplir la condición

$$\ell^2 - 2\ell g \sin(\theta) > 0$$

Teniendo en cuenta la restricción que ya teníamos en θ, nos lleva a:

$$\theta < \arcsin\left(\frac{\ell}{2g}\right)$$

Enseguida, usando las condiciones iniciales e integrando dos veces se tiene:

$$\varphi(t) = (-g\sin(\theta))\frac{t^2 - T_1^2}{2} + \sqrt{\ell^2 - 2\ell g \sin(\theta)}(t - T_1) + \ell$$

Para que se alcance el borde del plano y luego la esfera caiga libremente, es necesario y suficiente que $\varphi(T2) = L$ y $\varphi'(T2) = 0$. Es decir, se tiene el sistema de ecuaciones:

$$(-g\sin(\theta))\frac{T_2^2 - T_1^2}{2} + \sqrt{\ell^2 - 2\ell g \sin(\theta)}(T_2 - T_1) = L - \ell$$

$$-g\sin(\theta)T_2 + \sqrt{\ell^2 - 2\ell g \sin(\theta)} = 0$$

Con ello obtenemos:

$$T_2 = \frac{\sqrt{\ell^2 - 2\ell g \sin(\theta)}}{g\sin(\theta)}$$

Y reemplazando los valores de T_1 y T_2 en la primera ecuación del sistema se tiene la tercera condición, que junto a las anteriores deben ser satisfechas para que la esfera llegue al borde del plano y caiga libremente siguiendo una vertical:

$$\begin{aligned}\frac{\ell^2 - 2\ell g \sin(\theta)}{g \sin(\theta)} = L - \ell - \frac{g \sin(\theta)}{2} &\left(\cos^{-1} \left(\frac{g \sin(\theta)}{g \sin(\theta) - \ell} \right) \right)^2 \\ &+ \sqrt{\ell^2 - 2\ell g \sin(\theta)} \cos^{-1} \left(\frac{g \sin(\theta)}{g \sin(\theta) - \ell} \right)\end{aligned}$$

□

3

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

3.1. Sistemas de coeficientes constantes

Problema 3.1. Demuestre que la solución del sistema $\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{f},\ \vec{x}(0) = \vec{x}_0$, donde A es matriz de coeficientes constantes, esta dada por:

$$\vec{x} = e^{At}\vec{x}_0 + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}\vec{f}(\tau)d\tau$$

donde:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k$$

Solución: Para ello note que:

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k k\cdot t^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}A^k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^{k+1}t^k = Ae^{At}$$

Luego notemos que si derivamos nuestra solución:

$$\begin{aligned}
\vec{x}' &= Ae^{At}\vec{x}_0 + Ae^{At}\int_0^t e^{-A\tau}\vec{f}(\tau)d\tau + e^{At}(e^{-At}\vec{f}(t)) \\
&= Ae^{At}\vec{x}_0 + Ae^{At}\int_0^t e^{-A\tau}\vec{f}(\tau)d\tau + \vec{f}(t) \\
&= A\left(e^{At}\vec{x}_0 + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}\vec{f}(\tau)d\tau\right) + \vec{f}(t) \\
&= A\vec{x} + \vec{f}(t)
\end{aligned}$$

$\square$

Observación: Este resultado es muy importante en el caso que la matriz A sea nilpotente, es decir que para algun n se cumple $A^n = 0$ y por ende para todo $m > n$ también se tiene que $A^m = 0$. Así la matriz e^{At} se puede calcular simplemente sumando:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}A^k t^k$$

En general en los típicos ejemplos se hace 0 para $n = 3$ y por ende:

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2$$

cosa muy rápida de calcular en las pruebas para una matriz 2×2 o 3×3.

Problema 3.2. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y' &= y + 2x + \cos t \\ x' &= 2y + x + \sin t \end{cases}$$

con condiciones iniciales $y(0) = 0$, $x(0) = 0$.

Solución: Sean $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Entonces, aplicando la transformada a cada ecuación:

$$y' = y + 2x + \cos(t) \quad \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \quad sY(s) - y(0) = Y(s) + 2X(s) + \frac{s}{s^2+1}$$

$$x' = 2y + x + \sin(t) \quad \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \quad sX(s) - x(0) = X(s) + 2Y(s) + \frac{1}{s^2+1}$$

Reemplazando las condiciones iniciales y reescribiendo el sistema en su forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 1-s & 2 \\ 2 & 1-s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y(s) \\ X(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{s}{s^2+1} \\ -\dfrac{1}{s^2+1} \end{pmatrix}$$

Empleando la *Regla de Crammer*,

$$X(s) = \frac{3s-1}{(s^2+1)(s-3)(s+1)} \qquad \wedge \qquad Y(s) = \frac{s^2-s+2}{(s^2+1)(s-3)(s+1)}$$

El resto del problema consiste en obtener las transformadas inversas de estas funciones. Para ello, por la linealidad de LT, basta obtener las transformadas inversas de las siguientes tres funciones:

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+1)(s-3)(s+1)}\right\}$$

$$f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)(s-3)(s+1)}\right\}$$

$$f_3(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s-3)(s+1)}\right\}$$

- Para $f_1(t)$,

$$F_1(s) = \frac{s^2}{(s^2+1)(s-3)(s+1)} = \frac{as+b}{s^2+1} + \frac{c}{s-3} + \frac{d}{s+1} = \frac{-1/10\ s + 1/5}{s^2+1} + \frac{9/40}{s-3} - \frac{1/8}{s+1}$$

$$\therefore\ f_1(t) = -\frac{1}{10}\ \cos(t) + \frac{1}{5}\ \sin(t) + \frac{9}{40}\ e^{3t} - \frac{1}{8}\ e^{-t}$$

- Para $f_2(t)$,

$$F_2(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s-3)(s+1)} = \frac{as+b}{s^2+1} + \frac{c}{s-3} + \frac{d}{s+1} = \frac{-1/5\ s - 1/10}{s^2+1} + \frac{3/40}{s-3} + \frac{1/8}{s+1}$$

$$\therefore\ f_2(t) = -\frac{1}{5}\ \cos(t) - \frac{1}{10}\ \sin(t) + \frac{3}{40}\ e^{3t} + \frac{1}{8}\ e^{-t}$$

- Para $f_3(t)$,

$$F_3(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s-3)(s+1)} = \frac{as+b}{s^2+1} + \frac{c}{s-3} + \frac{d}{s+1} = \frac{1/10\ s - 1/5}{s^2+1} + \frac{1/40}{s-3} - \frac{1/8}{s+1}$$

$$\therefore\ f_3(t) = \frac{1}{10}\ \cos(t) - \frac{1}{5}\ \sin(t) + \frac{1}{40}\ e^{3t} - \frac{1}{8}\ e^{-t}$$

Finalmente, como $x(t) = 3f_2(t) - f_3(t)$,

$$x(t) = -\frac{7}{10}\ \cos(t) - \frac{1}{10}\ \sin(t) + \frac{1}{5}\ e^{3t} + \frac{1}{2}\ e^{-t}$$

y como $y(t) = f_1(t) - f_2(t) + 2f_3(t)$,

$$y(t) = \frac{3}{10}\ \cos(t) - \frac{1}{10}\ \sin(t) + \frac{1}{5}\ e^{3t} - \frac{1}{2}\ e^{-t}$$

□

Problema 3.3. Encuentre la solución general del sistema:

$$\begin{aligned} x' &= x + 3y + t^2 \\ y' &= 3x + y - 2e^{-2t} \end{aligned}$$

Solución: El problema es equivalente a

$$\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{f}$$

con $\vec{x} = (x, y)^T$, $\vec{f} = (t^2, -2e^{-2t})^T$ y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Para resolver el problema intentaremos diagonalizar la matriz para desacoplar el sistema. Necesitamos encontrar los valores propios; estos se encuentran resolviendo el polinomio característico dado por $|A - \lambda I| = 0$. Así:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 9 = (\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0$$

De donde es claro que sus valores propios son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -2$. La matriz es diagonal entonces solo necesitamos encontrar sus vectores propios. Para λ_1 ponemos $v_1 = (a, b)^T$:

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \ \longrightarrow\ a + 3b = 4a\ \wedge\ 3a + b = 4b$$

La solución mas simple es tomar $v_1 = (1,1)^T$, por otra parte para $\lambda_2 = -2$ ponemos $v_2 = (c,d)^T$ y tenemos:

$$Av_2 = \lambda_2 v_2 \longrightarrow c + 3d = -2c \wedge 3c + d = -2d$$

la solución mas simple es tomar $v_2 = (1,-1)^T$ con esto construimos la matriz de vectores propios:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y como $A = VDV^{-1}$ y $D = V^{-1}AV$, el problema anterior es equivalente a $\vec{x}' = VDV^{-1}\vec{x} + \vec{f}$, luego es claro que el cambio de variables (obviando los símbolos de vectores) $\vec{u} = V^{-1}\vec{x}$ nos deja:

$$u' = V^{-1}x' = V^{-1}(Ax + f) = V^{-1}(VDV^{-1}Vu + f) = \boxed{Du + V^{-1}f = u'}$$

Estamos casi listos, pues calculando

$$V^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

el problema queda como sigue:

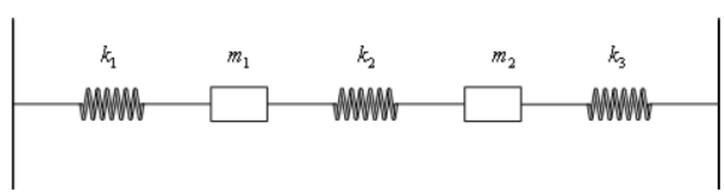
$$\begin{aligned} u_1' &= 4u_1 + \frac{t^2}{2} - e^{-2t} \\ u_2' &= -2u_2 + \frac{t^2}{2} + e^{-2t} \end{aligned}$$

Estos son problemas lineales que se resuelven con los métodos de factor integrante. Resolviendo $\vec{u}$ obtenemos simplemente $\vec{x} = V\vec{u}$ con lo que la solución queda:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{4t} + C_2 e^{-2t} + \dfrac{7}{64} + \dfrac{t^2}{8} - \dfrac{5t}{16} + \left(\dfrac{1}{6} + t\right) e^{-2t} \\[2ex] C_1 e^{4t} - C_2 e^{-2t} - \dfrac{9}{64} + \dfrac{3t}{16} - \dfrac{3t^2}{8} + \left(\dfrac{1}{6} - t\right) e^{-2t} \end{pmatrix}$$

□

Problema 3.4. Consideremos el sistema de masas $m_1 = m_2 = 1$kg y de resortes cuyas constantes de restitución son k_1, k_2 y k_3 con valores 1 N/m, 4 N/m, 1 N/m repectivamente, como en la figura siguiente:



Determine las posiciones $x_1(t)$, $x_2(t)$ de las masas m_1 y m_2 respectivamente, con respecto a sus posiciones de equilibrio para datos iniciales arbitrarios, considere que los resortes se comportan de manera ideal y que las masas son puntuales.

Solución: Utilizando la segunda ley de Newton, obtenemos las ecuaciones de movimiento, las que son:

$$\begin{cases} m_1 x_1''(t) = -k_1 x_1(t) + k_2(x_2(t) - x_1(t)) \\ m_2 x_2''(t) = -k_2(x_2(t) - x_1(t)) - k_3 x_2(t) \end{cases}$$

Entonces reemplazamos los valores númericos para obtener un sistema de la forma $\vec{x}'' = K\vec{x}$, donde se tiene que:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad ; \quad K = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Para resolver este problema, diagonalizamos la matriz K, entonces buscamos sus valores propios, los que son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -9$, mientras que los vectores propios $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_2$ son:

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Recordamos de Álgebra Lineal que si una matriz A es diagonalizable, entonces se cumple que $A = PDP^{-1}$, donde D es una matriz diagonal cuyos coeficientes son los valores propios de A mientras que P es una matriz invertible cuyas columnas son los vectores propios de A.
Por lo tanto para este problema, podemos definir $\vec{y} = P^{-1}\vec{x}$, donde $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, con ello se obtiene que $\vec{y}(t)$ satisface el sistema:

$$\begin{cases} y_1''(t) = -y_1(t) \\ y_2''(t) = -9y_2(t) \end{cases}$$

Cuya solución general es:

$$y_1(t) = C_{1,1}\cos(t) + C_{1,2}\sin(t) \quad ; \quad y_2(t) = C_{2,1}\cos(3t) + C_{2,2}\sin(3t)$$

Donde $C_{i,j}$ corresponden a las constantes arbitrarias dadas por las condiciones iniciales, ya que $\vec{x}(t) = P\vec{y}(t)$, la solución general del problema corresponde a:

$$\vec{x}(t) = (C_{1,1}\cos(t) + C_{1,2}\sin(t))\,\vec{p}_1 + (C_{2,1}\cos(3t) + C_{2,2}\sin(3t))\,\vec{p}_2$$

De allí se concluye que los $C_{i,j}$ están relacionados con las condiciones iniciales por:

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} C_{1,1} + C_{2,1} \\ C_{1,1} - C_{2,1} \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{x}'(0) = \begin{pmatrix} C_{1,2} + 3C_{2,1} \\ C_{1,2} - 3C_{2,2} \end{pmatrix}$$

$\square$

Problema 3.5. Resuelva el sistema: $x' = -5x + 2y$, $y' = -6x + 2y$

Solución: El sistema lo podemos escribir matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de la matriz es

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{I}) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

Así, los valores propios son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -2$. Los vectores propios para λ_1 satisfacen:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Los vectores propios para λ_2 satisfacen:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

La solución general del sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

o equivalentemente,

$$x(t) = c_1\ e^{-t} + c_2\ e^{-2t} \qquad \wedge \qquad y(t) = 2c_1\ e^{-t} + \frac{3c_2}{2}\ e^{-2t}$$

$\square$

Problema 3.6. Determine las soluciones de:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

Solución: El sistema lo podemos escribir matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de la matriz es

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{I}) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

Así, los valores propios son $\lambda_1 = 1 + i$ y $\lambda_2 = 1 - i$. Los vectores propios para λ_1 satisfacen:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\vec{v}_2 = \overline{\vec{v}_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

La solución general del sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(1+i)t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(1-i)t}$$

o equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = d_1 \begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ -e^t \sin(t) \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} e^t \sin(t) \\ e^t \cos(t) \end{pmatrix}$$

con $d_1 = c_1 + c_2$, $d_2 = i(c_1 - c_2)$. Notar que:

$$\operatorname{Re}\left\{\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}\right\} = \begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ -e^t \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im}\left\{\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}\right\} = -\operatorname{Im}\left\{\vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}\right\} = \begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ e^t \sin(t) \end{pmatrix}$$

□

Problema 3.7. Obtenga una solución particular para el sistema:

$$\begin{aligned} x' &= 4x + y + e^t \\ y' &= 6x - y - e^t \end{aligned}$$

que satisfaga las condiciones iniciales $x(0) = y(0) = 0$.

Solución: El sistema se puede reescribir en notación matricial como:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

Para la matriz cuadrada, determinamos los valores y vectores propios para diagonalizarla. Al obtener el polinomio característico de la matriz, se tiene que $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 5$. Igual que antes, determinamos los vectores propios calculando el kernel de las matrices $A - \lambda_i \mathbb{I}$. Así,

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \wedge \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si definimos las matrices

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

entonces el sistema puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = VDV^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

Si realizamos el siguiente cambio de variables,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

el sistema se puede desacoplar:

$$V\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = VD\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + V^{-1}\begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

con

$$V^{-1} = \frac{1}{\det(V)}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/7 & -1/7 \\ 6/7 & 1/7 \end{pmatrix}$$

El sistema queda como sigue:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u \\ 5v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^t/7 \\ 5e^t/7 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} u' = -2u + 2e^t/7 \\ v' = 5v + 5e^t/7 \end{array}$$

Resolvemos ambas ecuaciones por separado:

- Por la linealidad de la ecuación para $u(t)$, utilizamos un factor integrante. Con ello,

$$u(t) = \frac{2}{21}e^t + C_1e^{-2t}$$

- Igual que en el caso anterior, empleamos un factor integrante para determinar la solución de la ecuación.

$$v(t) = -\frac{5}{28}e^t + C_2e^{5t}$$

Regresando a las variables originales,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + v \\ -6u + v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t/12 + C_1e^{-2t} + C_2e^{5t} \\ -3e^t/4 - 6C_1e^{-2t} + C_2e^{5t} \end{pmatrix}$$

Aplicando las condiciones iniciales, obtenemos un sistema para las constantes:

$$\begin{pmatrix} 1/12 \\ 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad C_1 = -\frac{2}{21} \ \wedge \ C_2 = \frac{5}{28}$$

Con lo cual la solución particular del sistema es:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t/12 - 2e^{-2t}/21 + 5e^{5t}/28 \\ -3e^t/4 + 12e^{-2t}/21 + 5e^{5t}/28 \end{pmatrix}$$

□

Problema 3.8. Resuelva, mediante el método de valores propios,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}\vec{x}$$

Solución: El polinomio característico de la matriz es

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{I}) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

Así, los valores propios son $\lambda = 2$. Los vectores propios para λ satisfacen:

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Para determinar $\vec{v}_2$, aplicamos la **Forma 1** y resolvemos

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

que es una posible solución, entre infinitas. Si aplicamos la **Forma 2**, resolvemos

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Entonces, $\vec{v}_2$ es cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ que no sea múltiplo de $\vec{v}_1$. Por ejemplo, podemos usar $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^t$. Así,

$$\vec{v}_1 = (A - 2\mathbb{I})\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución del sistema es:

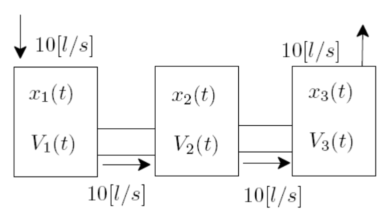
$$\vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} te^{2t}$$

o bien

$$\vec{x}(t) = d_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} e^{2t} + d_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + d_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} te^{2t}$$

□

Problema 3.9. Considere un sistema de 3 tanques con una mezcla homogénea de sal con agua. Denote por x_i, V_i la cantidad de sal y el volumen de agua de cada tanque respectivamente. Al primer tanque entran 10 $[L/s]$ de agua fresca; éste conduce 10 $[L/s]$ al segundo tanque. Este otro estanque libera 10 $[L/s]$ al tercero, y se extraen 10 $[L/s]$ de este último.



Si las condiciones iniciales son:

$$\begin{array}{lclcl} V_1(0) = 30\ [L] & , & V_2(0) = 60\ [L] & , & V_3(0) = 30\ [L] \\ x_1(0) = 400\ [g] & , & x_2(0) = 200\ [g] & , & x_3(0) = 100\ [g] \end{array}$$

Resuelva la concentración de sal en el tercer tanque pasados 5 minutos. Resuelva la concentración del segundo tanque en el momento en que el tercero se vacía.

Solución: Sea $x_k(t)$ la cantidad de sal en el tanque $k-$ésimo en un tiempo t. La ecuación que modela el proceso es conocida desde el inicio del curso:

$$\frac{dx}{dt} = \Big(\textit{flujo que entra}\Big)\cdot\Big(\textit{concentración de entrada}\Big) - \left(\frac{\textit{flujo que sale}}{\textit{volumen del tanque}}\right) x(t) = r_i c_i - \frac{r_o}{V(t)} x(t)$$

con $V(t) = V_0 + (r_i - r_o)t$. Aplicándola a cada tanque, tenemos que:

$$\begin{aligned} x_1{}' &= -\frac{x_1}{3} \\ x_2{}' &= \frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{6} \\ x_3{}' &= \frac{x_2}{6} - \frac{x_3}{3} \end{aligned}$$

Como el sistema está parcialmente desacoplado, resolvemos primero para $x_1(t)$ por variables separadas:

$$x_1(t) = A_1\ e^{-t/3}$$

Reemplazamos esta ecuación y resolvemos para $x_2(t)$ con el uso de factor integrante:

$$x_2(t) = -2A_1\ e^{-t/3} + A_2\ e^{-t/6}$$

Finalmente, reemplazamos en la ecuación asociada a $x_3(t)$:

$$x_3(t) = -\frac{A_1}{3}\ te^{-t/3} + A_2\ e^{-t/6} + A_3\ e^{-t/3}$$

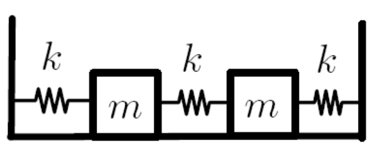
Aplicamos las condiciones iniciales para obtener un sistema algebraico asociado a las constantes:

$$\begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} A_1 &= 400 \\ A_2 &= 1000 \\ A_3 &= -900 \end{aligned}$$

La concentración la obtenemos dividiendo por 60, el volumen de líquido del tercer tanque. Los demás reemplazos y cálculos quedan propuestos al lector.

□

Problema 3.10. Obtenga la solución general de las ecuaciones de movimiento para los dos cuerpos de la figura:



Solución: Las ecuaciones de movimiento consideran el desplazamiento horizontal de cada cuerpo a la derecha desde la posición de equilibrio. Para el primer cuerpo, éstas se obtienen como sigue:

- Si el cuerpo 1 se desplaza x_1 unidades hacia la derecha, entonces el primer resorte ejercerá una fuerza de magnitud kx_1 en la dirección contraria al movimiento.

- Si el cuerpo 1 se desplaza x_1 unidades hacia la derecha, entonces el cuerpo 2 se desplazará en x_2 unidades hacia la misma dirección. Así, el resorte intermedio se habrá contraído/expandido en $x_1 - x_2$ unidades, y por tanto ejercerá una fuerza de magnitud $k(x_1 - x_2)$ sobre el cuerpo 1 en la dirección contraria al movimiento.

- Finalmente,
$$m{x_1}'' = -kx_1 - k(x_1 - x_2) = -2kx_1 + kx_2$$

El mismo proceso, aplicado al cuerpo 2, nos dará la segunda ecuación de movimiento:

$$m{x_2}'' = kx_1 - 2kx_2$$

Escribimos matricialmente nuestro sistema de ecuaciones:

$$m\begin{pmatrix} {x_1}'' \\ {x_2}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k & k \\ k & -2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Como $k > 0$, los valores y vectores propios del sistema son:

$$\lambda_1 = -k\ ,\ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \wedge \qquad \lambda_2 = -3k\ ,\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Así,
$$m\begin{pmatrix} {x_1}'' \\ {x_2}'' \end{pmatrix} = VDV^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

con V, D las matrices de vectores y valores propios, respectivamente. Hacemos el cambio de variables $\vec{x} = V\vec{y}$, y con ello:
$$m\begin{pmatrix} {y_1}'' \\ {y_2}'' \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Hemos desacoplado el sistema de ecuaciones,

$$\begin{array}{rcl} m{y_1}'' & = & -ky_1 \\ m{y_2}'' & = & -3ky_2 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} y_1(t) & = & A\cos(\sqrt{k/m}\ t) + B\sin(\sqrt{k/m}\ t) \\ y_2(t) & = & C\cos(\sqrt{3k/m}\ t) + D\sin\sqrt{3k/m}\ t \end{array}$$

Ahora, se obtiene la solución para $\vec{x}$ (que son las variables de interés), recordando que el cambio de variables hecho anteriormente fue:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

que es la solución general del sistema. En un problema de valores iniciales, las cuatro constantes se determinan de cuatro ecuaciones, que están dadas por las posiciones y velocidades iniciales de cada uno de los cuerpos.

□

Problema 3.11. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -y + 3z \\ y' & = & -2x + y + 3z \\ z' & = & -2x - y + 5z \end{array}$$

(a) Determine una matriz fundamental para este sistema.

(b) Halle la matriz exponencial asociada al sistema.

(c) Resuelva el sistema para las siguientes condiciones iniciales: $x(0) = 1,\ y(0) = 1,\ z(0) = 0$.

Solución:

(a) El sistema es equivalente a

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Para calcular la matriz fundamental necesitamos obtener los vectores propios de la matriz A, para ello necesitamos encontrar los valores propios dados por la ecuación

$$|A - \lambda I| = (2 - \lambda)^3 = 0$$

entonces su valor propio es $\lambda = 2$. Calculamos sus vectores propios asociados calculando el ker.

$$\ker(A - 2I) \ \rightarrow \ \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego la ecuación $-2a - b + 3c = 0$ puede resolverse si imponemos $c = 0 \rightarrow a = 1,\ b = -2$ y si imponemos $b = 0 \rightarrow a = 3,\ c = 2$ y por lo tanto tenemos 2 vectores LI:

$$v_1 = (1, -2, 0)^T \quad \wedge \quad v_2 = (3, 0, 2)^T$$

Para encontrar la matriz fundamental necesitamos un tercer vector generalizado. Para ello se utiliza el siguiente método:

i. Encontramos un vector v_3 en el ker de la matriz $(A - \lambda I)^2$

ii. Recalculamos un vector propio anterior v_2 ya que el nuevo es generalizado con la fórmula

$$v_2 = (A - 2I)v_3$$

Luego v_1 debe ser LI con v_2.

iii. La matriz fundamental tendrá de columnas $[v_1 \quad v_2 \quad v_3 + v_2 t]$ por su respectiva exponencial.

Luego para este problema

$$\ker(A - 2I)^2 \rightarrow 0_M$$

donde 0_M representa la matriz de puros ceros de 3×3. Un vector en ese ker puede ser el vector $v_3 = (0, 0, 1)^T$ con lo recalculamos $v_2 = (A - 2I)v_3 = (3, 3, 3)^T$. Así la matriz fundamental esta dada por:

$$\Phi(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3t \\ -2 & 3 & 3t \\ 0 & 3 & 1 + 3t \end{pmatrix}$$

□

(b) Calculamos la matriz exponencial de la siguiente forma:

$$e^{At} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$$

Notemos que

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular su inversa vamos a utilizar la fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ Adj[A]$$

por lo que calculamos la matriz adjunta. Con lo que si notamos que $|\Phi(0)| = 9$ y que

$$Adj[\Phi(0)] = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

y así

$$e^{At} = \Phi(t)\frac{1}{9}\ Adj[\Phi(0)] = e^{2t}\begin{pmatrix} 1-2t & -t & 3t \\ -2t & 1-t & 3t \\ -2t & -t & 1+3t \end{pmatrix}$$

□

(c) La solución esta dada por

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{c}$$

pero

$$\mathbf{c} = \Phi(0)^{-1}\ \mathbf{x}(0)$$

y por lo tanto:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1-2t & -t & 3t \\ -2t & 1-t & 3t \\ -2t & -t & 1+3t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1-t \\ -1-t \\ -t \end{pmatrix}$$

□

Problema 3.12. Sea:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Calcular e^{At} que sea solución a la ecuación $X' = AX$.

Solución: La idea de este problema es calcular la exponencial por medio de su serie:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k$$

Pero para hacer esto vamos separar la matriz en una identidad mas una nilpotente, de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = aI_3 + B$$

y podemos aprovecharnos de la propiedad de la exponencial

$$e^{S+T} = e^S e^T$$

si las matrices S y T conmutan. En este caso si conmutaran pues toda matriz conmuta con la identidad.

Calcular e^{aI_3t} es muy simple, pues consiste en simplemente:

$$e^{aI_3t} = \begin{pmatrix} e^{at} & 0 & 0 \\ 0 & e^{at} & 0 \\ 0 & 0 & e^{at} \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{at} I_3$$

y para calcular e^{Bt} solo basta notar que:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow B^n = 0_M \ \forall n \geq 3$$

por lo que

$$e^{Bt} = I + Bt + \frac{B^2 t}{2} = \begin{pmatrix} 1 & bt & ct + \frac{b^2t^2}{2} \\ 0 & 1 & bt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$e^{At} = e^{at} I_3 e^{Bt} = e^{at} \begin{pmatrix} 1 & bt & ct + \frac{b^2t^2}{2} \\ 0 & 1 & bt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Problema 3.13. Según sea los valores del parámetro real $p \neq 0$, encuentre la solución de:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -y \\ y'(t) &= \left(\frac{1}{p} - 1\right) x + \frac{1}{p} y \end{aligned}$$

Solución: La matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{p} - 1 & \frac{1}{p} \end{pmatrix}$$

con lo que su ecuación característica dada por $|A - \lambda I| = 0$:

$$\left[-\lambda \cdot \left(\frac{1}{p} - \lambda\right)\right] - (-1)\left(\frac{1}{p} - 1\right) = \lambda^2 - \frac{\lambda}{p} + \left(\frac{1}{p} - 1\right) = 0 \longrightarrow p\lambda^2 - \lambda + (1-p) = 0$$

así, sus valores propios son:

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-4p(1-p)}}{2p} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4p+4p^2}}{2p}\frac{1 \pm \sqrt{(2p-1)^2}}{2p} = \frac{1 \pm (2p-1)}{2p}$$

Por lo tanto distinguimos 2 casos:

(a) Si $p \neq 1/2$. En este caso existen 2 valores propios distintos entre si, dados por:

$$\lambda_1 = 1 \quad \wedge \quad \lambda_2 = \frac{1}{p} - 1$$

Así la matriz:

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \\ \frac{1}{p} - 1 & \frac{1}{p} - 1 \end{pmatrix}$$

tiene como vector propio $\vec{v}_1 = (1,-1)^T$ pues $A\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1$, mientras que por otro lado la matriz:

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{p} & -1 \\ \\ \frac{1}{p} - 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene como vector propio $\vec{v}_2 = \left(1, 1 - \frac{1}{p}\right)^T$. Así la solución al problema en este caso es:

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_2 e^{\left(\frac{1}{p}-1\right)t} \\ \\ -C_1 e^t + C_2\left(1 - \frac{1}{p}\right) e^{\left(\frac{1}{p}-1\right)t} \end{pmatrix}$$

(b) Si $p = 1/2$ tenemos un único valor propio dado por $\lambda = 1$, que también era valor propio del caso anterior con vector propio $\vec{v}_1 = (1,-1)^T$. En este caso al ser un sistema 2×2 la solución estará dada por:

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{\lambda t}\vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda t}(\vec{v}_2 + t\vec{v}_1)$$

En este caso v_2 debe estar en el:

$$\ker(A - \lambda I)^2 \to \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego cualquier vector esta en ese ker, por lo que escogemos $\vec{v}_2 = (-1,0)^T$ que es LI con $\vec{v}_1$ y tenemos entonces:

$$\vec{x}(t) = C_1 e^t \vec{v}_1 + C_2 e^t(\vec{v}_2 + t\vec{v}_1) = \begin{pmatrix} (C_1 - C_2 + C_2 t)e^t \\ (-C_1 - C_2 t)e^t \end{pmatrix}$$

□

Problema 3.14. Calcule A si:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^t & e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ 3e^{2t} - 3e^t & 3e^{2t} - 3e^t & 3e^t - 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

Como e^{At} es matriz fundamental que cumple $\Phi'(t) = A\Phi(t) \to \Phi'(t)\Phi^{-1}(t) = A$. Por lo que evaluando en $t = 0$ y notando que $e^{A0} = I \to (e^{A0})^{-1} = e^{-A0} = I$:

$$A = \frac{d}{dt}e^{At}\bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix} 4e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - e^t & e^t - 2e^{2t} \\ 2e^{2t} - e^t & 4e^{2t} - e^t & e^t - 2e^{2t} \\ 6e^{2t} - 3e^t & 6e^{2t} - 3e^t & 3e^t - 4e^{2t} \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

□

3.2. Variación de Parámetros

Problema 3.15. Resuelva $x' = 3x - y + 4e^{2t}$, $y' = -x + 3y + 4e^{4t}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$:

Solución:

Tenemos un sistema de la forma $\vec{x}' = Ax + \vec{f}(t)$, donde se tiene que:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} 4e^{2t} \\ 4e^{4t} \end{pmatrix}$$

Lo primero que hacemos es buscar una solución $\vec{x}_h$ a la ecuación homogenea $\vec{x}' = Ax$, para esto buscamos la matriz fundamental $\Phi(t)$ buscando los valores y vectores propios de la matriz. Notamos que los valores propios con $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 4$, los vectores propios que les corresponden son:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

De esto es inmediato que:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ e^{2t} & -e^{4t} \end{pmatrix}$$

Lo que significa:

$$\vec{x}_h(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ e^{2t} & -e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Ahora para encontrar la solución particular $\vec{x}_p$, tenemos que resolver $\Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(x)\vec{f}(x)dx$, entonces invertimos la matriz $\Phi(t)$ (recuerde la matriz adjunta), de donde tenemos:

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{2t} \\ e^{-4t} & -e^{-4t} \end{pmatrix}$$

Con lo que se tiene que el integrando es:

$$\Phi^{-1}(x)\vec{f}(x) = 2 \begin{pmatrix} 1 + e^{2x} \\ e^{-2x} - 1 \end{pmatrix}$$

Para evaluar la integral usamos $t_0 = 0$, ya que nos conviene para las condiciones iniciales que tenemos, con lo que se tiene:

$$\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(x)\vec{f}(x)dx = 2 \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} 1 + e^{2x} \\ e^{-2x} - 1 \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} 2t + e^{2t} - 1 \\ -e^{-2t} + 1 - 2t \end{pmatrix}$$

Con esto se tiene que la solución particular corresponde a:

$$\vec{x}_p(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ e^{2t} & -e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t + e^{2t} - 1 \\ -e^{-2t} + 1 - 2t \end{pmatrix}$$

Usando las condiciones iniciales se tiene que $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$, por lo que la solución del sistema de edos es:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ e^{2t} & -e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ e^{2t} & -e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t + e^{2t} - 1 \\ -e^{-2t} + 1 - 2t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2te^{2t} + 2e^{4t} - e^{2t} - 2te^{4t} \\ 2te^{2t} + e^{2t} + 2te^{4t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\square$

Problema 3.16. Mediante variación de parámetros, resuelva:

$$\begin{aligned} x' &= 3x - y + 7 \\ y' &= 9x - 3y + 5 \end{aligned}$$

con las siguientes condiciones iniciales: $x(0) = 3$ e $y(0) = 5$.

Solución: Sean:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Comenzamos por encontrar una matriz fundamental. Recordemos que en el caso de 2×2, el polinomio característico viene dado por:

$$\lambda^2 - \text{Tr}(A) + \det(A) = 0$$

Como en este caso, $\text{Tr}(A) = \det(A) = 0$, $\lambda = 0$ es valor propio con multiplicidad igual a dos. Hallamos los vectores propios asociados:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Notamos que $(A - 0 \cdot \mathbb{I})^2 = 0$, y por tanto el vector propio generalizado es cualquier vector en $\mathbb{R}^2$ tal que no sea múltiplo de $\vec{v}_1$. En particular:

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \vec{v}_1 = A\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Una matriz fundamental del sistema es:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -1 & -t \\ -3 & 1 - 3t \end{pmatrix}$$

Buscamos la exponencial del sistema:

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad e^{At} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1+3t & -t \\ 9t & 1-3t \end{pmatrix}$$

Calculamos la solución homogénea:

$$\vec{x}_h = e^{At}\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 4t+3 \\ 12t+5 \end{pmatrix}$$

Para la solución particular,

$$\vec{f}(\tau) = e^{-A\tau}\vec{b} = \begin{pmatrix} 1-3t & t \\ -9t & 1+3t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-16t \\ 5-48t \end{pmatrix}$$

$$\vec{g}(t) = \int_0^t \vec{f}(\tau)\ d\tau = \begin{pmatrix} 7t-8t^2 \\ 5t-24t^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_p = e^{At}\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 7t+8t^2 \\ 5t+24t^2 \end{pmatrix}$$

Y la solución final es:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_h + \vec{x}_p = \begin{pmatrix} 3+11t+8t^2 \\ 5+17t+24t^2 \end{pmatrix}$$

□

Problema 3.17. Hallar funciones $x(t), y(t), z(t)$ tales que $x(0) = y(0) = z(0) = 1$ y

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y + 3z \\ y' &= y + 2z \\ z' &= z + e^t \end{aligned}$$

Solución: Sean:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

La solución general estará dada por:

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}_0 + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}\vec{b}(\tau)\ d\tau$$

Si escribimos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{I} + B$$

tenemos que $e^{At} = e^{\mathbb{I}t}e^{Bt} = e^t e^{Bt}$ y, por su parte,

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B^3 = 0$$

por lo cual:

$$e^{Bt} = \mathbb{I} + Bt + B\frac{t^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 2t & 3t+2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos que

$$e^{At}\vec{x}_0 = e^t \begin{pmatrix} 1 & 2t & 3t+2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1+5t+2t^2 \\ 1+2t \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{x}_h$$

Así, la solución particular es

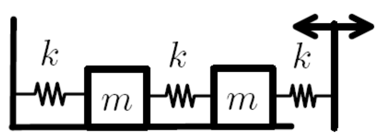
$$\vec{x}_p = e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}\vec{b}(\tau)\ d\tau = e^t \begin{pmatrix} \frac{3}{2}t^2 + \frac{2}{3}t^3 \\ t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

Finalmente, la solución general es:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_p + \vec{x}_h$$

□

Problema 3.18. Resuelva las ecuaciones de movimiento para el sistema de dos masas unidas por resortes, considerando que la pared de la derecha tiene un desplazamiento de su posición inicial dado por $A\cos(\omega t)$:



Solución: Primero, escribamos las ecuaciones de movimiento:

$$mx'' = -2kx + ky \quad \wedge \quad my'' = kx - 2ky + kA\cos(\omega t)$$

Se nota que el sistema es similar al del **Problema 3.10**, pero tiene un término que hace del sistema un del tipo no homogéneo:

$$m\vec{x}\,'' = A\vec{x} + \vec{b}(t)\ , \qquad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ kA\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

Utilizando la diagonalización de A realizada en dicha oportunidad, y haciendo el cambio de variables $\vec{x} = V\vec{x}$, la ecuación se reescribe como:

$$mV\vec{y}\,'' = VD\vec{y} + \vec{b}(t) \quad \longrightarrow \quad m\vec{y}\,'' = D\vec{y} + V^{-1}\vec{b}(t)\ , \qquad V^{-1}\vec{b}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} kA\cos(\omega t) \\ -kA\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones, ahora desacoplado, queda como:

$$\left(D^2 + {\omega_0}^2\right)y_1 = {\omega_0}^2 kA\cos(\omega t)/2 \qquad \wedge \qquad \left(D^2 + 3{\omega_0}^2\right)y_2 = -{\omega_0}^2 kA\cos(\omega t)/2$$

con ${\omega_0}^2 = k/m$. Estas ecuaciones pueden resolverse utilizando *coeficientes indeterminados.* El aniquilador del lado derecho de ambas ecuaciones es $(D^2 + \omega^2)$. Teniendo esto, se procede a resolver ambas ecuaciones por separado. Partimos con y_1:

$$\left(D^2 + {\omega_0}^2\right)\left(D^2 + \omega^2\right)y_1 = 0$$

La solución de la ecuación homogénea es:

$${y_1}^h = \mathcal{A}\cos(\omega_0 t) + \mathcal{B}\sin(\omega_0 t)$$

Para la solución particular, distinguimos dos casos:

- **Caso a.** Si $\omega \neq \omega_0$, la solución particular es:

$${y_1}^{p,a} = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)$$

  Reemplazando en la EDO, y aplicando coeficientes indeterminados se obtiene que:

$$c_1 = \frac{{\omega_0}^2 kA}{2({\omega_0}^2 - \omega^2)} \quad \wedge \quad c_2 = 0$$

- **Caso b.** Si $\omega = \omega_0$,

$${y_1}^{p,b} = c_1 t\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)$$

  Igualando coeficientes en la EDO,

$$c_1 = 0 \quad \wedge c_2 = \frac{\omega kA}{4}$$

La solución particular es entonces

$${y_1}^p = \begin{cases} {y_1}^{p,a} & , \ \omega \neq \omega_0 \\ {y_1}^{p,b} & , \ \omega = \omega_0 \end{cases}$$

Para la segunda ecuación, el proceso (que es equivalente al anterior) se deja propuesto al lector. La solución del sistema es entonces:

$$y_1 = {y_1}^p + {y_1}^h \quad \wedge \quad y_2 = {y_2}^p + {y_2}^h$$

Al igual que en el ejercicio de la ayudantía anterior, las soluciones originales x, y se obtienen recordando que $\vec{x} = V\vec{y}$: $x = y_1 + y_2$, $y = y_1 - y_2$.

□

Problema 3.19. Considerar el sistema

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

Donde la matriz A tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -\omega^2 & \lambda \end{pmatrix}$$

(a) Demuestre que la solución general de este sistema se escribe de la forma:

$$\vec{x}_h(t) = e^{\lambda t}\left(\cos(\omega t)I_2 + \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)J_\omega\right)\vec{c}$$

Donde $\vec{c}$ es un vector constante que depende de las condiciones iniciales, I_2 es la matriz identidad de 2×2, y J_ω es una matriz de la forma:

$$J_\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Usando el resultado anterior, resuelva inmediatamente la ecuación no homógenea de la forma:

$$\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{b}(t)$$

Donde se tiene que la parte no homogénea de la ecuación corresponde a:

$$\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \omega\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

Solución:

(a) Notamos que $A = \lambda I_2 + J_\omega$, es decir, la suma de dos matrices que conmutan, por lo tanto $\forall t \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$e^{At} = e^{\lambda t}e^{J_\omega t}$$

Entonces calculamos las potencias de J_ω para así usar la serie exponencial, para ello basta notar que:

$$J_\omega^2 = (-1)\omega^2 I_2$$

Entonces tenemos que las potencias n-ésimas de J_ω serían las siguientes (dependiendo de si n es par o impar):

$$J_\omega^n = \begin{cases} (-1)^k\omega^{2k}I_2 & \text{si } n = 2k \\ (-1)^k\omega^{2k}J_\omega & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

Con esto separando términos pares de impares en la serie exponencial, obtenemos que $e^{J_\omega t} = \cos(\omega t)I_2 + \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)J_\omega$, por lo tanto la solución general de la ecuación homógenea se escribe de la forma:

$$\vec{x}_h(t) = e^{\lambda t}\left(\cos(\omega t)I_2 + \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)J_\omega\right)\vec{c}$$

(b) Como ya tenemos la matriz e^{At}, la cual también es una matriz fundamental, podemos utilizar variación de parámetros, por lo que la solución particular a la ecuación corresponde a (recordando que la inversa de e^{At} es e^{-At}):

$$\vec{x}_p = e^{At}\int_0^t e^{-Ax}\vec{b}(x)dx = \int_0^t e^{A(t-x)}\vec{b}(x)dx$$

Aprovechando el cálculo de la parte a, podemos tener de forma inmediata que:

$$e^{A(t-x)} = e^{\lambda(t-x)}\left(\cos(\omega(t-x))I_2 + \frac{1}{\omega}\sin(\omega(t-x))J_\omega\right)$$

Luego si multiplicamos esa matriz por $\vec{b}(x)$, obtenemos que el integrando corresponde a:

$$e^{A(t-x)}\vec{b}(x) = e^{\lambda(t-x)}\begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

Entonces la integrar en $x \in [0,t]$, se tiene:

$$\vec{x}_p = \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda t}-1)\begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la solución general a la ecuación corresponde a:

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\left(\cos(\omega t)I_2 + \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)J_\omega\right)\vec{c} + \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda t}-1)\begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

□

3.3. Análisis Cualitativo

Problema 3.20. Linealizar en torno a cada uno de los puntos de equilibrio del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x' &= x(7 - x - 2y) \\ y' &= y(5 - x - y) \end{aligned}$$

Luego, en base a cada linealización, estudie la estabilidad del sistema.

Solución: Lo primero que debemos hacer es buscar los puntos de equilibrio. Apreciando la forma del sistema, sabemos que los puntos de equilibrio son cuatro. Recordamos que los puntos de equilibrio satisfacen: $f(x,y) = g(x,y) = 0$. Es claro que los puntos de equilibrio son los siguientes:

$$P_0 = (0,0)\ , \quad P_1 = (7,0)\ , \quad P_2 = (0,5)\ , \quad P_3 = (3,2)$$

Calculamos la matriz Jacobiana:

$$J_{f,g}(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ g_x(x,y) & g_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 - 2x - 2y & -2x \\ -y & 5 - x - 2y \end{pmatrix}$$

Reemplazamos los puntos de equilibrio en la matriz:

- P_0:

$$J_{f,g}(0,0) = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

  donde los autovalores son: $\lambda_1 = 7$ y $\lambda_2 = 5$. Como ambos autovalores son reales y mayores que cero, se cumple el teorema de Hartman-Grobman y se concluye que el sistema es **inestable** (repulsor no espiral) en P_0.

- P_1:

$$J_{f,g}(7,0) = \begin{pmatrix} -7 & -14 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

  donde los autovalores son: $\lambda_1 = -7$ y $\lambda_2 = -2$. Como ambos autovalores son reales y menores que cero, se cumple el teorema de Hartman-Grobman y se concluye que el sistema es **estable** (atractor no espiral) en P_1.

- P_2:

$$J_{f,g}(0,5) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$$

  donde los autovalores son: $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = -5$. Como ambos autovalores son reales y menores que cero, se cumple el teorema de Hartman-Grobman y se concluye que el sistema es **estable** (atractor no espiral) en P_2.

- P_3:

$$J_{f,g}(3,2) = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

  donde los autovalores son: $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -6$. Como ambos autovalores son reales, se cumple el teorema de Hartman-Grobman y se concluye que el sistema es **inestable** (punto silla) en P_3.

$\square$

Problema 3.21. Encuentre los puntos de equilibrio del sistema:

$$\begin{aligned} x'(t) &= x^2 - y^2 \\ y'(t) &= x^2 + y^2 - 18 \end{aligned}$$

Utilizando el método de Linealización, clasifíquelos cuando sea posible como atractores, repulsores o sillas.

Solución: Hay que resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - y^2 \\ 0 &= x^2 + y^2 - 18 \end{aligned}$$

que resuelve: $(3,3)^T,\ (3,-3)^T,\ (-3,3)^T,\ (-3,-3)^T$. Para clasificarlos calculamos la matriz jacobiana:

$$J = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

Luego para $(3,3)^T$ tenemos $\Delta = 72 > 0$ y $\tau = 12 > 0$ y por ende es repulsor.

Para $(3,-3)^T$ tenemos $\Delta = -72 < 0$ y luego $(3,-3)^T$ es silla.

Para $(-3,3)^T$ tenemos $\Delta = -72 < 0$ y por ende $(-3,3)^T$ es silla.

Para $(-3,-3)^T$ tenemos $\Delta = 72 > 0$ y $\tau = -12 < 0$ y por tanto $(-3,-3)^T$ es atractor.

□

Problema 3.22. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(6 - 2x - y) \\ \dot{y} &= y(2 - x - y) \end{aligned}$$

Con $x \geq 0$, $y \geq 0$.

(a) Encuentre los puntos estacionarios y dibuje el diagrama de fase local alrededor de cada uno de estos puntos.

(b) Si $(x(t), y(t))$ es la solución tal que $(x(5), y(5)) = (0, 10)$. Encuentre , si existe, el límite de la solución cuando $t \to \infty$.

(c) Si $(x(t), y(t))$ es la solución tal que $(x(-1), y(-1)) = (2, 8)$. Encuentre , si existe, el límite de la solución cuando $t \to \infty$.

(d) Si $(x(t), y(t))$ es la solución tal que $(x(0), y(0)) = (0, 2)$. Encuentre , si existe, el límite de la solución cuando $t \to \infty$.

Solución:

(a) Los puntos estacionarios son las soluciones de

$$\begin{aligned} 0 &= x(6-2x-y) \\ 0 &= y(2-x-y) \end{aligned}$$

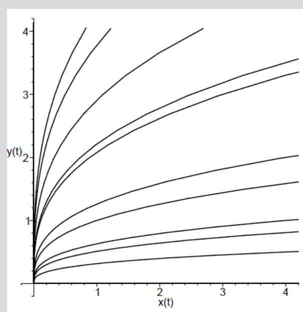
Resolviendo obtenemos los puntos $(0,0)$, $(0,2)$, $(3,0)$ y $(8/3,-2/3)$, como (x,y) pertenecen al primer cuadrante, descartamos este último punto.
Considerando $f(x,y)=x(6-2x-y)$ y $g(x,y)=y(2-x-y)$, tenemos que sus derivadas parciales son:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 6-4x-y \\ f_y(x,y) &= -x \\ g_x(x,y) &= -y \\ g_y(x,y) &= 2-x-2y \end{aligned}$$

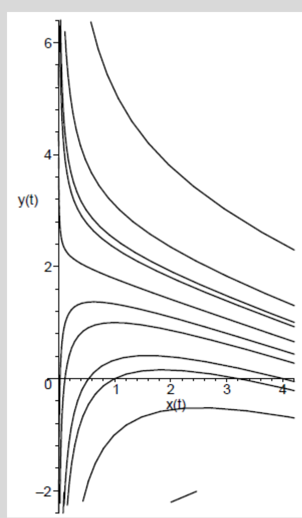
Por lo tanto, la linearización en torno a cada uno de ellos está dada por el sistema asociado a las siguientes matrices:

$$(0,0):\quad \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad (0,2):\quad \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad (3,0):\quad \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

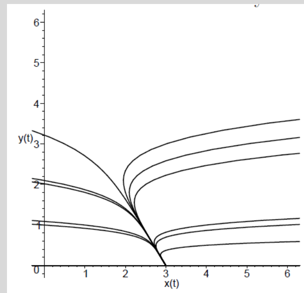
De donde $(0,0)$ es un punto estacionario inestable repulsor o fuente y su diagrama se ve así:



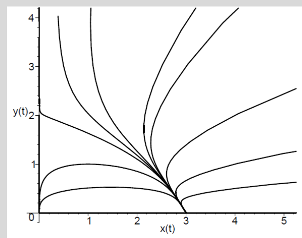
De donde $(0,2)$ es un punto estacionario tipo silla y su diagrama se ve así:



De donde $(3,0)$ es un punto estacionario estable o atractor y su diagrama se ve así:



Uniendo líneas el diagrama de fase del sistema en el primer cuadrante se ve asi:



(b) Las trayectorias en el eje y con $y > 0$ se mantienen en el eje y convergen a $(0,2)$.

(c) El diagrama de fase sugiere que converja al atractor $(3,0)$.

(d) Como $(0,2)$ es estacionario, la solución converge a $(0,2)$.

□

Problema 3.23. Considere la familia de sistemas lineales:

$$\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & a \end{pmatrix} \vec{x}\ , \qquad a \in \mathbb{R}$$

Determine para qué valores de a el sistema tiene un único punto de equilibrio. Luego, clasifique el sistema, dependiendo de los distintos valores de a.

Solución: Primero vemos de qué forma son los autovalores asociados. Definimos la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & a \end{pmatrix}$$

de donde tenemos que:

$$Tr(A) = 2a \quad \text{y} \quad det(A) = a^2 - a$$

Por lo tanto, los autovalores de A son:

$$\lambda_1 = a + \sqrt{a} \qquad \wedge \qquad \lambda_2 = a - \sqrt{a}$$

Entonces, para determinar solo un punto de equilibrio (el origen), se debe cumplir que no haya un valor propio nulo. Esto se debe a que si tenemos un valor propio nulo, en el infinito la solución va a tender al vector asociado a ese valor propio nulo y no al origen; por lo tanto, tendríamos más de un punto de equilibrio, lo que contradice el enunciado.

Claramente los valores propios son nulos cuando: $a = 0$ y $a = 1$. Por lo tanto, vamos a analizar los puntos de equilibrio en los casos en que a pertenece a cada uno de esos tres intervalos:

- $a < 0$:
$$\lambda_1 = -|a| + i\sqrt{|a|} \qquad \wedge \qquad \lambda_2 = -|a| - i\sqrt{|a|}$$
Los dos valores propios son complejos conjugados, donde $Re\{a\} < 0$. Es decir, es estable (atractor espiral).
- $0 < a < 1$:
$$\lambda_1 > 0 \qquad \wedge \qquad \lambda_2 < 0$$
Tenemos dos valores propios de signos opuestos, por lo que es inestable (punto silla).
- $a > 1$:
$$\lambda_1 > 0 \qquad \wedge \qquad \lambda_2 => 0$$
Es decir, ambos valores propios son positivos; por lo tanto, es inestable (repulsor no espiral).

□

Problema 3.24. Estudie cualitativamente el comportamiento del sistema:

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x - y) \quad \wedge \quad \frac{dy}{dt} = y(0{,}75 - y - 0{,}5x)$$

en el cual, x e y representan la cantidad de individuos de dos especies que compiten por los mismos recursos.

Solución: Los puntos de equilibrio del sistema son (0,0), (1,0), (0,0.75) y (0.5,0.5). Procedemos a estudiar la linealización del sistema en torno a dichos puntos:

- (0,0):
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
La solución de este sistema es:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0{,}75t}$$
Por lo tanto, el punto actúa como un repulsor en las direcciones de ambos ejes coordenados. En cuanto a estabilidad, ambos valores propios del sistema linealizado son positivos, por lo cual el punto de equilibrio es **inestable**.
- (1,0):
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La solución de este sistema es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} e^{0,25t}$$

Por lo tanto, es un punto de equilibrio inestable que actúa como atractor en la dirección definida por el eje X, y como un repulsor en la dirección definida por el vector $(4, -5)$. En cuanto a estabilidad, un valor propio del sistema linealizado es positivo, por lo cual el punto de equilibrio es **inestable**.

- (0,0.75):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 \\ -0,375 & -0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La solución de este sistema es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} e^{0,25t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0,75t}$$

Por lo tanto, es un punto de equilibrio inestable que actúa como atractor en la dirección definida por el vector $(8, -3)$, y como un repulsor en la dirección definida por el eje Y. En cuanto a estabilidad, uno de los valores propios del sistema linealizado es positivo, por lo cual el punto de equilibrio es **inestable**.

- (0.5,0.5):

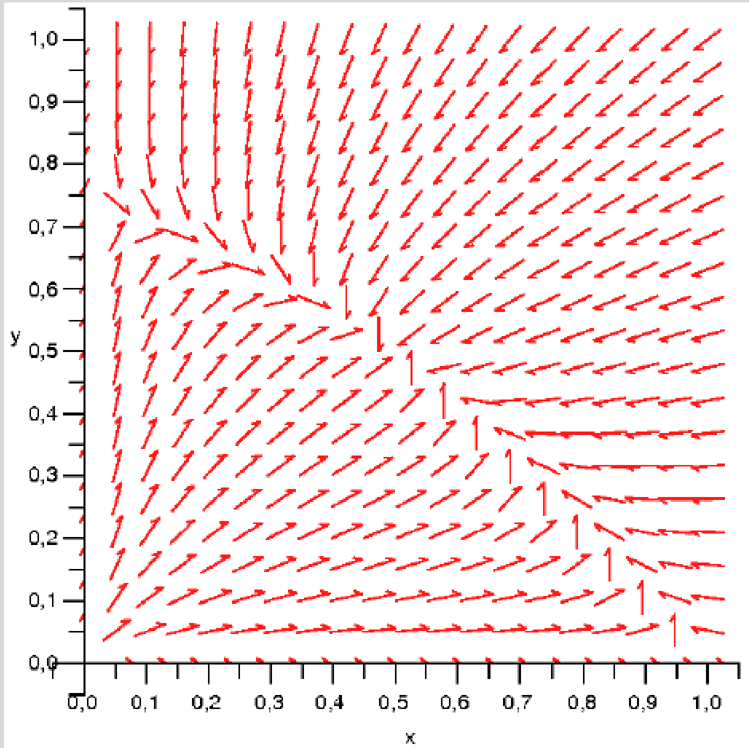
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & -0,5 \\ -0,25 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La solución de este sistema es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} e^{-(2-\sqrt{2})t} + c_2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-(2+\sqrt{2})t}$$

Ambas exponenciales son negativas, por lo cual se tiene un punto de equilibrio atractor. En cuanto a estabilidad, ambos valores propios del sistema linealizado son negativos, por lo cual el punto de equilibrio es **estable**.

Juntando estos resultados, es posible esbozar el comportamiento del sistema no lineal, que se muestra en el plano fase xy de la figura.



De la gráfica se observa que la cantidad de ambas poblaciones tiende a un número estable en el cual ambas conviven.

□

4 Anexos

4.1. Transformada de Laplace

Definimos la **Transformada de Laplace** (LT) (unilateral) como:

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Propiedades de la LT: Sean $\mathcal{L}(f) = F$ y $\mathcal{L}(g) = G$ entonces:

(a) Desplazamiento temporal, interesa calcular la LT de $f(t-a)H(t-a)$:

$$\mathcal{L}(f(t-a)H(t-a))(s) = e^{-as}F(s)$$

(b) Desplazamiento en el dominio de Laplace:

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t))(s) = F(s-a)$$

(c) Derivación en el dominio del tiempo:

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = sF(s) - f(0) \quad , \quad \mathcal{L}(f''(t))(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

podemos generalizarlo de la forma:

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s) = s^nF(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k}f^{(k)}(0)$$

donde $f^{(0)}(0) = f(0)$.

(d) Integración el tiempo con $f(0) = 0$:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(t)dt\right)(s) = \frac{1}{s}F(s)$$

(e) Derivación en el dominio de Laplace:

$$\mathcal{L}(t \cdot f(t))(s) = -\frac{d}{ds}F(s)$$

Propiedad de la convolución: Definimos:

$$h(t) = f(t) * g(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du$$

que es conmutativa y tiene la propiedad en el dominio de Laplace que:

$$\mathcal{L}(f(t) * g(t))(s) = F(s)G(s)$$

y así mismo también:

$$\mathcal{L}(f(t)g(t))(s) = F(s) * G(s)$$

<u>Transformadas Comunes</u>

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	*Dominio*
C	$\dfrac{C}{s}$	$s > 0$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0,\ n = 1, 2, \ldots$
t^q	$\dfrac{\Gamma(q+1)}{s^{q+1}}$	$s > 0,\ q \in \mathbb{R}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	$s > a$
$\sin(at)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$	$s > a$
$\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$s > a$
$\sinh(at)$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$	$s > \|a\|$
$\cosh(at)$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$s > \|a\|$
$\delta(t-a)$	e^{-sa}	$0 \leq a$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	
$f(t-a)H(t-a)$	$e^{-as}F(s)$	
$t^n f(t)$	$(-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n} F(s)$	
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \Big(f^{(n-1)}(0) + s f^{(n-2)}(0) + \cdots + s^{n-1} f(0)\Big)$	
$\displaystyle\int_0^t f(\tau)\ d\tau$	$\dfrac{F(s)}{s}$	
$f(t) * g(t)$	$F(s)G(s)$	
$f(at)$	$\dfrac{F(s/a)}{\|a\|}$	

4.2. Sistemas de ecuaciones diferenciales

4.2.1. Valores y Vectores Propios

Sea A una matriz compleja de $n \times n$. Sean $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\vec{x} \neq \vec{0}$ tal que

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

- El escalar λ se llama valor propio de A.
- El vector $\vec{x}$ se llama vector propio de A.

$$\begin{aligned} \lambda_i \text{ es valor propio de } A &\quad\longleftrightarrow\quad P(\lambda) = \det(A - \lambda_i\mathbb{I}) = 0 \\ \vec{x}_i \text{ es vector propio de } A &\quad\longleftrightarrow\quad \vec{x}_i \in \ker(A - \lambda_i\mathbb{I}) \end{aligned}$$

- Se define la multiplicidad algebraica de λ_i a la cantidad de veces que dicha constante es solución de la ecuación $P(\lambda) = 0$; se denota por s_i.
- Al número $g_i = \dim\{\ker(A - \lambda_i\mathbb{I})\}$ se llama multiplicidad geométrica del valor propio λ_i, que corresponde a la cantidad de vectores linealmente independientes asociados a un mismo valor propio.

4.2.2. Diagonalización

- Si una matriz A de $n \times n$ tiene n valores propios distintos, entonces A es diagonalizable.
- A es diagonalizable si y solo si para cada valor propio de A la multiplicidad geométrica es igual a la multiplicidad algebraica.
- Una matriz A es diagonalizable sii A tiene una base de vectores propios. Más precisamente, si $V^{-1}AV = D$, donde $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ y la columna $i-$ésima de V es un vector propio $\vec{v}_i$ de A con valor propio λ_i.
- Si la matriz A no es diagonalizable, entonces es posible hallar vectores propios *generalizados*, de modo tal que exista una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP = J$, con J la forma canónica de Jordan.

4.2.3. Solución al sistema $\vec{x}' = A\vec{x}$ para matrices diagonalizables

La solución del sistema es

$$\vec{x}(t) = c_1\ \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\ \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} \qquad ,\text{ con } A\vec{v}_k = \lambda_k\vec{v}_k$$

Si λ_1, λ_2 son complejos, entonces $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ y $\vec{v}_1 = \overline{\vec{v}_2}$. Así, la solución puede escribirse como

$$\vec{x}(t) = d_1\ \mathrm{Re}\Big\{\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}\Big\} + d_2\ \mathrm{Im}\Big\{\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}\Big\}$$

4.2.4. Solución al sistema $\vec{x}' = A\vec{x}$ para matrices no diagonalizables

La solución viene dada por

$$\vec{x}(t) = c_1\ \vec{v}_1 e^{\lambda t} + c_2\ \Big(\vec{v}_2 + t\vec{v}_1\Big) e^{\lambda t}$$

con $\vec{v}_1$ el vector propio asociado a λ, y $\vec{v}_2$ un *vector propio generalizado.*

4.2.5. Cálculo de *vectores propios generalizados*

Hay dos métodos para determinar un conjunto de vectores propios generalizados de A (hay infinitas maneras de elegirlos).

- **Forma 1**
  (a) Se calcula el valor propio λ de A.
  (b) Se calcula $\vec{v}_1$ resolviendo $(A - \lambda\mathbb{I})\vec{v}_1 = \vec{0}$.
  (c) Se calcula $\vec{v}_2$ resolviendo a continuación $(A - \lambda\mathbb{I})\vec{v}_2 = \vec{v}_1$. Este sistema tiene infinitas soluciones pues la matriz $A - \lambda\mathbb{I}$ no tiene inversa.

- **Forma 2**
  (a) Se calcula el valor propio λ de A.
  (b) Se calcula $\ker(A - \lambda\mathbb{I})$ resolviendo $(A - \lambda\mathbb{I})\vec{x} = \vec{0}$.
  (c) Se elige a $\vec{v}_2$ como cualquiera que cumpla con:
    i) $(A - \lambda\mathbb{I})^2\ \vec{v}_2 = \vec{0}$
    ii) $(A - \lambda\mathbb{I})\ \vec{v}_2 \neq \vec{0}$
  (d) Se calcula $v_1 = (A - \lambda\mathbb{I})\vec{v}_2$

4.2.6. Matriz Fundamental

Se sabe que un sistema de $n \times n$ de la forma $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, con A diagonalizable, posee soluciones de la forma

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{x}_i(t)\ , \qquad \vec{x}_i(t) = \vec{v}_i e^{\lambda_i t}$$

donde $\vec{v}_i$ es el vector propio asociado al valor propio λ_i. El vector propio podría depender del parámetro t, en el caso en que la matriz del sistema no sea diagonalizable.

A partir de lo anterior, es posible escribir la solución general del sistema de la siguiente forma:

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{c}$$

donde $\Phi(t)$ es una matriz fundamental asociada al sistema. Esta matriz posee rango máximo (es invertible) ya que sus columnas poseen las soluciones linealmente independientes del sistema. Es fácil ver que no existe una única matriz fundamental, ya que se puede variar la elección de cada vector propio.

Para determinar el valor de $\vec{c}$ en la ecuación anterior, ocupamos las condiciones iniciales:

$$\vec{c} = \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \quad \longrightarrow \quad \vec{x}(0) = \Phi(0)\vec{c} \quad \longrightarrow \quad \vec{c} = \Phi(0)^{-1}\vec{x}_0$$

4.2.7. Matriz Exponencial

Una forma de hallar la exponencial de un sistema es emplear la expansión de Taylor para la función e^{At} de la misma forma que para la función exponencial de variable real:

$$e^{At} = \mathbb{I} + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^nt^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}$$

Notar que esta definición es de utilidad para matrices nilpotentes, o cuando A se puede descomponer como la suma de la identidad y una matriz nilpotente, i.e. que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$A^k = 0$$

Por otro lado, notemos que:

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{At}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} A\frac{(At)^{n-1}}{(n-1)!} = A\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}$$

por lo que la matriz exponencial es solución del sistema de ecuaciones. En particular, la exponencial del sistema *es una matriz fundamental* que satisface $\Phi(0) = \mathbb{I}$. Entonces, el sistema en cuestión se puede reescribir como sigue:

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}\vec{x}_0 = e^{At}\vec{x}_0 \quad \longrightarrow \quad \therefore\ e^{At} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$$

4.2.8. Sistemas de ecuaciones no homogéneos

El método de solución para este tipo de problemas es igual que en el caso de ecuaciones de orden superior: *variación de parámetros.* Sea el sistema

$$\vec{x}\,' = A\vec{x} + \vec{b}(t)$$

con solución homogénea

$$\vec{x}_h = \Phi(t)\vec{c}$$

Entonces, buscamos que la solución particular sea de la siguiente forma:

$$\vec{x}_p = \Phi(t)\vec{u}(t)$$

Reemplazamos la solución particular en el sistema no homogéneo:

$$\Phi'(t) = \vec{u}(t) + \Phi(t)\vec{u}\,'(t) = A\Phi(t)\vec{u}(t) + \vec{b}(t)$$

Reordenando lo anterior,

$$\Big(\Phi'(t) + A\Phi(t)\Big)\vec{u}(t) + \Phi(t)\vec{u}\,'(t) = \vec{b}(t)$$

donde la expresión al interior de l paréntesis es nula, puesto que $\Phi(t)$ es solución de la ecuación homogénea. Por lo tanto, se deduce que:

$$\Phi(t)\vec{u}\,' = \vec{b}(t) \quad \longrightarrow \quad \vec{u}\,'(t) = \Phi(t)^{-1}\vec{b}(t) \quad \longrightarrow \quad \vec{u}(t) = \int_0^t \Phi(\tau)^{-1}\vec{b}(\tau)\ d\tau$$

Finalmente, la solución general es:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_h + \vec{x}_p = \Phi(t)\vec{c} + \Phi(t)\int_0^t \Phi(\tau)^{-1}\vec{b}(\tau)\ d\tau$$

Si ocupásemos la exponencial del sistema como matriz fundamental, y dado que $\Phi(0) = e^0 = \mathbb{I}$, se tiene que:

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}_0 + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}\vec{b}(\tau)\ d\tau$$

4.2.9. Matrices defectuosas o no diagonalizables

Teorema de Cayley-Hamilton

Si en el polinomio característico de una matriz A, $P_A(\lambda)$, se sustituye λ por A se obtendrá siempre la matriz nula; i.e. $P_A(A) = 0$.

Vectores Propios Generalizados

Recordemos que:

$$e^{t(A-\lambda\mathbb{I})}\vec{v} = \vec{v} + t(A-\lambda\mathbb{I})\vec{v} + \frac{t^2}{2!}(A-\lambda\mathbb{I})^2\vec{v} + \cdots$$

Buscamos, para cada valor propio λ, vectores $\vec{v}$ (tantos como la multiplicidad algebraica de λ) tales que $(A-\lambda\mathbb{I})\vec{v} = \vec{0}$ o $(A-\lambda\mathbb{I})^2\vec{v} = \vec{0}$ o $(A-\lambda\mathbb{I})^3\vec{v} = \vec{0}$, etc. Para aquellos vectores que satisfagan

$$(A-\lambda\mathbb{I})^p\vec{v} = \vec{0}$$

con $p > 1$, diremos que $\vec{v}$ es un *vector propio generalizado* de A correspondiente a λ.

4.3. Linealización

4.3.1. Sistema Lineal

Recordemos que en un sistema lineal:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \vec{x} = A\vec{x}$$

sus puntos de equilibrios son aquellos que resuelven

$$\vec{x}' = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} ax + by & = & 0 \\ cx + dy & = & 0 \end{array}$$

De aquí es directo que si $\det(A) \neq 0$ el único punto de estabilidad es $(0,0)^T$. Ahora nos interesa conocer el comportamiento asintótico de la solución. Sabemos que esto dependerá de los valores propios. Según sea el valor propio (ya sea reales distintos, complejos conjugados, etc.) dependerá la solución del problema. Recordando que los valores propios se obtienen como:

$$0 = \det(A - \lambda I) = (\lambda - a)(\lambda - d) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc$$

y recordemos la definición de la Traza y el Determinante:

$$\tau = \mathrm{Tr}(A) = a + d \quad \wedge \quad \Delta = \det(A) = ad - bc$$

y las relaciones con los valores propios λ y μ como:

$$\Delta = \lambda\mu \quad \wedge \quad \tau = \lambda + \mu$$

podemos entregar el comportamiento asintótico según estos nuevos parámetros, además de los parámetros utilizando los valores propios. Este resumen se presenta en la Figura 4.1 con respecto al punto $(0,0)^T$.

4.3.2. Linealización

Consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{dx}{dt} & = & f(x,y) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} & = & g(x,y) \end{array}$$

Deseamos analizar cualitativamente el sistema, i.e. sin la necesidad de resolverlo. Para ello, linealizaremos el sistema en torno a los puntos de equilibrio del sistema: $f(x_0,y_0) = g(x_0,y_0) = 0$. A continuación, planteamos las expansiones de Taylor de primer orden,

$$\begin{array}{rcl} x' & = & f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0,y_0) \cdot (y - y_0) \\ y' & = & g(x_0,y_0) + g_x(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + g_y(x_0,y_0) \cdot (y - y_0) \end{array}$$

Escribiendo las relaciones anteriores en su forma matricial,

$$\begin{pmatrix} (x - x_0)' \\ (y - y_0)' \end{pmatrix} = J_{f,g}(x_0,y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

con $J_{f,g}$ la matriz jacobiana del sistema:

$$J_{f,g} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}$$

Utilizando como origen el punto (x_0, y_0), la linealización queda como sigue:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = J_{f,g}(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Luego, las soluciones del sistema linealizado tienen la siguiente forma:

$$\vec{x}(t) = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

donde el resultado anterior es válido *ssi* se cumplen las condiciones del siguiente teorema.

4.3.3. Teorema de Hartman-Grobman

Considere el siguiente sistema no lineal, con f, g curvas lo suficientemente suaves (para tener derivadas continuas)

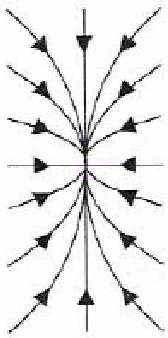
$$\begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y) \end{aligned}$$

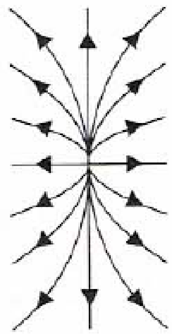
Supongamos que (x_0, y_0) es un punto de equilibrio del sistema y que $J_{f,g}(x_0, y_0)$ no tiene valores propios puramente imaginarios ni nulos. Entonces, existe un homeomorfismo h definido en un entorno U de (x_0, y_0), $h : U \to \mathbb{R}^2$, que lleva las trayectorias del sistema no lineal sobre las del sistema linealizado.

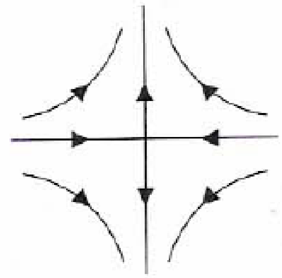
4.3.4. Clasificación de puntos de equilibrio

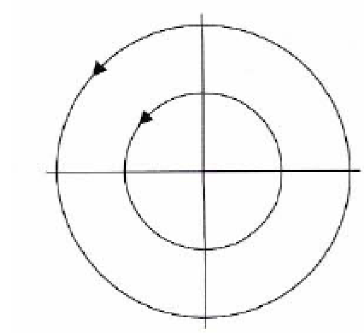
Sean $\lambda_1 = a_1 + ib,\ \lambda_2 = a_2 - ib$ los valores propios de la matriz jacobiana. Entonces,

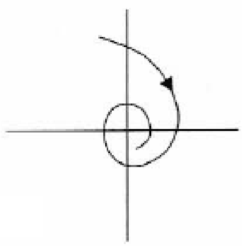
a_1	a_2	b	*Tipo*
$+$	$+$	0	Repulsor no espiral
$+$	$+$	$\neq 0$	Repulsor espiral
$-$	$-$	0	Atractor no espiral
$-$	$-$	$\neq 0$	Atractor espiral
$+$	$-$	$\neq 0$	Punto Silla
0		0	Línea de puntos críticos
0	0	$\neq 0$	Centro

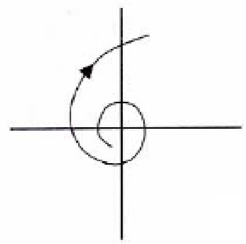

atractor no espiral

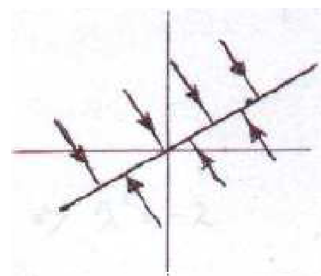

repulsor no espiral


punto silla


centro

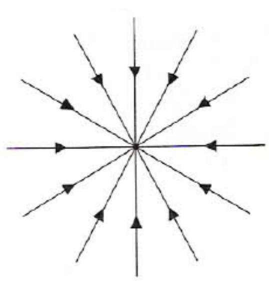

atractor espiral

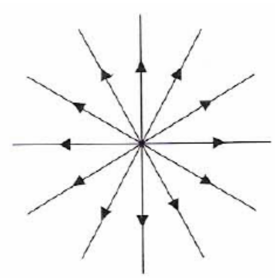

repulsor espiral


línea de puntos críticos

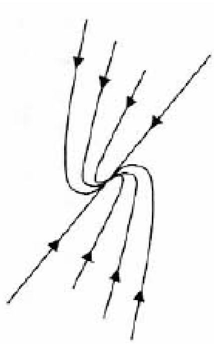
Si $\lambda_1 = \lambda_2$, entonces existen dos posibles casos:

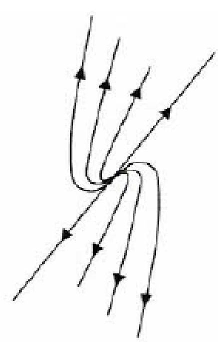
(a) Si $rango\Big(J_{f,g}(x_0, y_0) - \lambda \mathbb{I}\Big) = 0$, tenemos un *nodo especial*.





(b) Si $rango\Big(J_{f,g}(x_0, y_0) - \lambda \mathbb{I}\Big) = 1$, tenemos un *nodo degenerado*.





También se pueden clasificar los puntos de equilibrio de acuerdo a su estabilidad:

- **Estable:** Un punto de equilibrio se dice *estable* si los valores propios del sistema linealizado en torno a dicho punto tienen todos parte real negativa.
- **Inestable:** Un punto de equilibrio se dice *inestable* si existe algún valor propio del sistema linealizado en torno a dicho punto que tiene parte real positiva.

Otro método para clasificar los puntos de equilibrio:

El **Teorema de Hartman-Grobman** asegura que si $J(x_i, y_i)$ no tiene valores propios nulos (aunque sea 1) o valores propios únicamente imaginarios entonces el problema no lineal se comporta como el lineal cerca de (x_i, y_i). Esto quiere decir que para conocer la forma de los puntos de equilibrio obtenidos nos basta calcular el determinante y la traza de J (recordar la relación entre la traza y el determinante con los valores propios) y utilizar la siguiente figura:

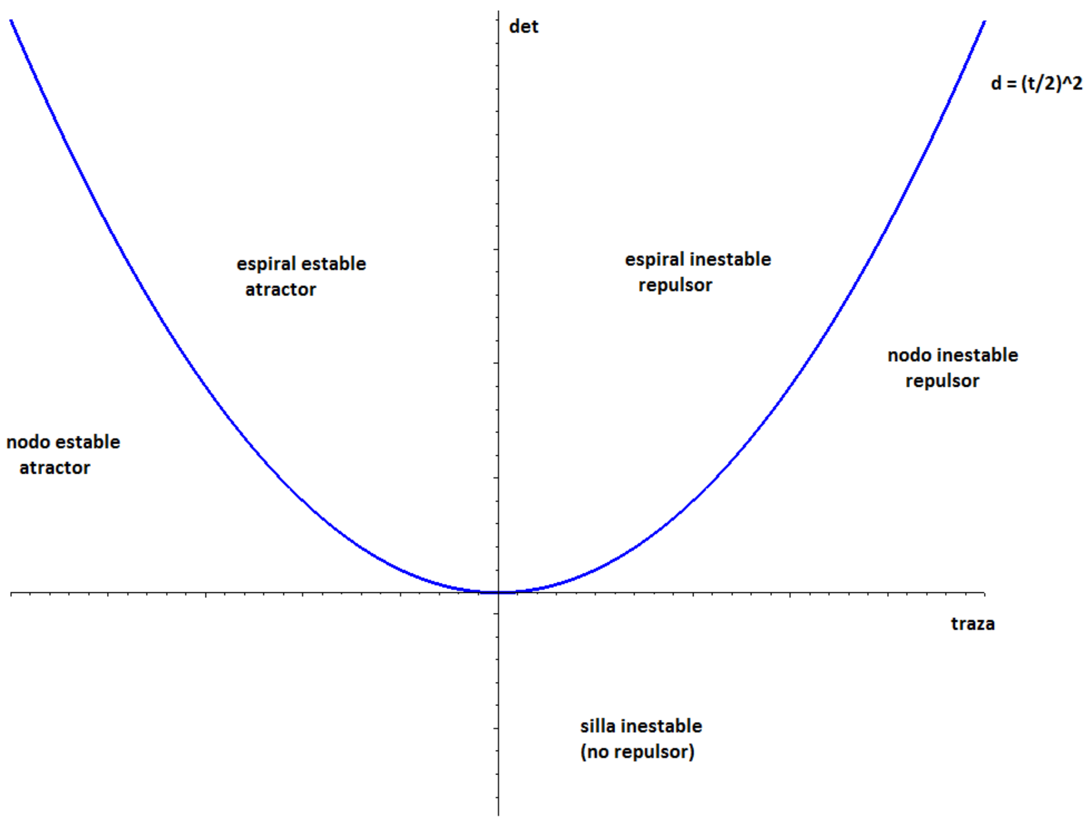


Figura 4.1: Resumen de los parámetros.

Note que inmediatamente si $\Delta < 0$ es silla inestable el punto. Además los puntos donde esta la curva $\Delta = \tau^2/4$, y las rectas cartesianas es justo donde el teorema de Hartman-Grobman no aplica.