Los siguientes apuntes están basados en el libro de Bonifacio Fernández. (2005) Introducción a la Mecánica de Fluidos. Ediciones Universidad Católica de Chile, Lecciones, Cuarta Edición, y los apuntes de clase del profesor Cristián Escauriaza Mesa.

Resumen I1 - Mecánica de Fluidos

Un fluido es un material que se deforma continuamente frente a esfuerzos de corte.
Un esfuerzo de corte (τ) es transversal o tangente a la superficie. Se considera un fluido como un medio continuo, ignorando las partículas (que si existen).

Así al ser un medio continuo existen 2 tipos de propiedades:

1. Propiedades intensivas: No dependen de la cantidad de masa, como la T° o ρ
2. Propiedad extensivas: Dependen de la cantidad de masa, como $\forall$ (volumen) o peso.

Una forma simple de saber que tipo de propiedad es decir que pasa si yo duplico la masa, ¿se duplica mi propiedad?

Definiciones:

1. Masa específica: $\rho = \lim\limits_{\forall \to 0} \dfrac{m}{\forall}$
2. Densidad: $d = \dfrac{\rho}{\rho_{\text{ref}}}$
3. Viscosidad: μ
   Dependerá en general de la T°, es decir de la cohesión y de la colisión. A mayor cohesión y colisión habrá mayor μ. Es importante notar que en los líquidos importará mas la cohesión y en los gases importará la colisión. Por eso si aumento la T° en los líquidos disminuye μ pues disminuye la cohesión (no pasa nada con la colisión) y en el caso de los gases si aumento T° aumenta μ pues aumenta lo colisión (y no pasa nada con lo cohesión).
4. Viscosidad cinemática: $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$
5. Velocidad se anotará como u o $\vec{V}$ en general.
6. Momento (o Torque): $M = r \times F$
7. Potencia: $d\text{Pot} = \omega\ dM = V\ dF = \text{Energia}\ dt$
8. Presión: P

Para fluidos newtonianos tenemos la **Ley de Viscosidad de Newton:**

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{d\theta}{dt} = \mu \frac{V_{\text{ini}} - V_{\text{fin}}}{\varepsilon}$$

De aquí es fácil notar que:

$$d\text{Torque} = dM = r\ dF = r\tau\ dA = r\left(\mu \frac{du}{dy}\right) dA = \mu r \frac{V}{\varepsilon}\ dA$$

Y tenemos la compresibilidad:

$$E = \rho \frac{dP}{d\rho} = -\forall \frac{dP}{d\forall}$$

Para los gases ideales tenemos:

$$P = \rho R T$$

Y la compresibilidad en los gases ideales es:

$$E = \alpha P$$

Distintos procesos:

1. Isobáricos: Presión Cte:
$$\rho T = \rho_0 T_0 \quad , \quad \alpha = 0$$

2. Isotérmicos: Temperatura Cte:
$$\frac{P}{\rho} = \frac{P_0}{\rho_0} \quad , \quad \alpha = 1$$

3. Isocóricos: Volumen (masa especifica) Cte:
$$\frac{P}{T} = \frac{P_0}{T_0} \quad , \quad \alpha = \infty$$

4. Adiabáticos (Isentrópico):
$$\frac{P}{\rho^k} = \frac{P_0}{\rho_0^k} \quad , \quad \alpha = k \quad , \quad k_{aire} = 1,4$$

Tipos de Fluidos: En general pueden ser modelados por la ecuación: $\tau = \tau_0 + \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^n$

1. Ideal: La viscosidad es despreciable, se deforma de forma instantánea.
2. Newtonianos: La relación entre el esfuerzo de corte y la deformación es constante.
3. Plástico: Es necesario hacer un esfuerzo de corte inicial para poder empezar a deformarlos.
4. Dilatante: Para producir mayor deformación sera necesario aplicar un esfuerzo de corte inmenso.
5. Pseudoplástico: Se me hace mas fácil deformar el fluido, esto quiero decir que mientras mas lo deformo menos esfuerzo de corte necesito.
6. Sólido: La viscosidad es infinita, no puedo deformarlos.

Fluidos con memoria, el esfuerzo de corte dependerá de lo ocurrido antes, por ejemplo si du/dy es constante tenemos:

1. Reopécticos: El esfuerzo de corte será mayor mientras pasa el tiempo para producir la misma deformación.
2. Normales: No son con memoria
3. Tixotrópicos: El esfuerzo de corte será menor mientras pasa el tiempo para producir la misma deformación.

Cinemática: Existen dos tipos de descripción:

1. Descripción en el tiempo: Fijarse en un punto del espacio.
   a) Flujo Permanente: Las propiedades del flujo no cambian en el tiempo, i.e.
   $$\frac{d\vec{V}}{dt} = 0$$
   b) Flujo Impermanente: Las propiedades del flujo cambian en el tiempo.
2. Descripción en el espacio: Fijar el tiempo en un instante.
   a) Flujo Uniforme: No hay variación espacial de las propiedades del flujo, i.e.
   $$\nabla V_x = \nabla V_y = \nabla V_z = 0$$
   b) Flujo Variado: Hay variación espacial de las propiedades.

Así podemos crear 4 tipos de flujos combinando las propiedades anteriores.

Descripción del movimiento del flujo:

1. Método de Lagrange: Consiste en determinar las líneas de trayectoria en función del tiempo:
   $$\vec{r}(\vec{r_0}, t_0, t) = x(\vec{r_0}, t_0, t)\hat{\mathbf{i}} + y(\vec{r_0}, t_0, t)\hat{\mathbf{j}} + z(\vec{r_0}, t_0, t)\hat{\mathbf{k}}$$
   Y de aquí:
   $$\vec{V}^{\mathcal{L}} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad , \quad \vec{a}^{\mathcal{L}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$
2. Método de Euler: Consiste en determinar el campo de velocidades en todo el espacio que ocupa el fluido:
   $$\vec{V}(x, y, z, t) = u(x, y, z, t)\hat{\mathbf{i}} + v(x, y, z, t)\hat{\mathbf{j}} + w(x, y, z, t)\hat{\mathbf{k}}$$
   Y toda su variación en distintos tipos de coordenadas.

Formas Cinemáticas:

1. Linea de trayectoria: El camino de un volumen elemental de fluido en el tiempo.
   Si conocemos el campo $\vec{V}$ Euleriano, entonces:
   $$\boxed{\frac{dx}{dt} = u \quad , \quad \frac{dy}{dt} = v \quad , \quad \frac{dz}{dt} = w}$$
   Con esto integramos desde lo conocido (t_0, x_0, y_0, z_0) hasta lo desconocido (x, y, z, t).
2. Líneas de Corriente: Es la linea formada a partir del campo de velocidad y es tangente a $\vec{V}$ en todos sus puntos (en un tiempo determinado). Es decir:
   $$\boxed{\vec{V} \times d\vec{s} = 0}$$
   Lo que implica:
   $$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{z}$$
   O en cilíndricas:
   $$\frac{d\rho}{u} = \frac{\rho d\varphi}{v} = \frac{dz}{z}$$
   Se integra desde lo conocido (t_0, x_0, y_0, z_0) hasta lo desconocido (x, y, z, t).

3. Líneas de Humo: Es la linea formada por todos los puntos en un tiempo t fijo que pasaron por otro punto en el pasado $\vec{r_0}$. Es decir:

$$\vec{r}(\underbrace{\vec{r_0}}_{\text{fijo}}, \underbrace{t_0}_{\text{variable}}, \underbrace{t}_{\text{fijo}})$$

La condición matemática es la misma que la de las líneas de trayectoria:

$$\frac{dx}{dt} = u \quad , \quad \frac{dy}{dt} = v \quad , \quad \frac{dz}{dt} = w$$

Pero ahora cuando integramos lo hacemos desde (t_0, x_0, y_0, z_0) pero t_0 es incognita y los demás son datos e integramos hasta (t, x, y, z) donde t es fijo y los demás son variables.

<u>Análisis Dimensional:</u> Consiste en estudiar los problemas estudiando las dimensiones del problema para reducir la cantidad de ecuaciones usando el teorema π de Buckingham. El método consiste en el siguiente:

1. Confeccionar una lista de los parámetros que intervienen en el problema, incluida el parámetro que queremos obtener en función de todos los demás.

2. Determinar las dimensiones de cada parámetro y encontrar el número de dimensiones fundamentales.

3. Elegir una base de parámetros que incluyan todas las dimensiones.

4. Reducir el número de parámetros a nuevos parámetros adimensionales.

Consideremos por ejemplo que queremos encontrar F en función de ρ, V, D, μ y g, donde estos son los parámetros fundamentales del problema (otros como ν o d dependerán de los otros). Encontramos cuantas dimensiones fundamentales tiene el problema, en este caso 3 $[M], [L]$ y $[T]$. Ahora definimos las dimensiones de los parámetros:

$$F = [MLT^{-1}], \quad V = [LT^{-1}], \quad D = [L], \quad \rho = [ML^{-3}], \quad \mu = [ML^{-1}T^{-1}], \quad g = [ML^{-2}]$$

Ahora elegimos la base, que tenga todo los parámetros, y no puede estar lo que queremos despejar, en este caso F, en la base. Por ejemplo: $V,\ D,\ \rho$ (Es recomendable elegir aquellas que no tienen parámetros en comunes, pues será mas fácil el cálculo). Ahora creamos $n - l$ parámetros adimensionales donde n es la cantidad de parámetros y l es la cantidad de dimensiones, agregando un parámetro que no sea de la base multiplicando a la base elevada a exponentes desconocidos. Lo demás consiste en resolver el sistema de ecuaciones igualando a 0 todas las dimensiones. Por ejemplo:

$$\pi_1 = FV^{\alpha_1}D^{\alpha_2}\rho^{\alpha_3}$$

Los exponentes los encontramos igualando a 0 todas las dimensiones (resolviendo el sistema de ecuaciones). Realizamos lo mismo para los demás:

$$\pi_2 = \mu V^{\beta_1}D^{\beta_2}\rho^{\beta_3} \quad , \quad \pi_3 = gV^{\gamma_1}D^{\gamma_2}\rho^{\gamma_3}$$

Luego uno sera función de los otros:

$$\pi_1 = \varphi(\pi_2, \pi_3) \longrightarrow F = V^{-\alpha_1}D^{-\alpha_2}\rho^{-\alpha_3}\varphi(\pi_2, \pi_3)$$

Lo que concluye el problema.

Comparación Modelo - Prototipo: Para esto se hace igualando el número adimensional mas importanteEn el modelo se hace una comparación del número adimensional mas importante del problema con la escala. Por ejemplo:

$$F_p = F_m \longrightarrow \frac{V_p}{\sqrt{gL_p}} = \frac{V_m}{\sqrt{gL_m}}$$

Además hacemos la relación de escala:

$$\frac{L_m}{L_p} = \frac{1}{20} \quad , \quad \text{Escala } 1:20$$

Esto nos generará la relación:

$$\frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{V_m}{V_p}$$

El problema ocurrirá que si yo igualo otros números adimensionales (por ejemplo $Re_m = Re_p$) obtendremos otra relación y quedará distorsionado el problema. Esto se debe a que no podemos controlar todos los parámetros como g o μ. Pero dado la autosimiliridad las cosas se comportaran de manera similar dentro de cierto rango que permitirá que el modelo siga siendo válido. Para un modelo es importante detectar cual es el número adimensional que permite conocer lo que mas nos importa de nuestro problema.

Números adimensionales:

1. Número de Reynolds: Relaciona los términos convectivos y la inercia de un fluido con su viscosidad:
$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}$$

2. Numero de Froude:
$$F_r = \frac{V}{\sqrt{gH}} \quad , \ \sqrt{gH} \text{ representa la velocidad de la ola (en sentido contrario a } V)$$
Por lo que si
$$F_r > 1 \longrightarrow \text{La velocidad del fluido hace que no se sienta la velocidad de la ola}$$

3. Número de Mach: Evalúa la relación de las velocidades del fluido con la velocidad del sonido.
$$Ma = \frac{V}{\sqrt{E/\rho}} \quad , \text{ Donde } E \text{ es el módulo de compresibilidad}$$

4. Número de Strouhal: Relaciona la frecuencia de oscilación de un fluido y su velocidad (o las anguilas):
$$St = \frac{\omega L}{V}$$

5. Número de Weber: Relaciona la inercia de un fluido comparada con su tensión superficial:
$$We = \frac{\rho V^2 L}{\sigma} \quad , \text{ donde } \sigma \text{ es la tensión superficial}$$

<u>Estática:</u> $\vec{V} = 0$ o bien $\vec{V} = \text{cte}$, lo que en términos simples implica:

$$\nabla u = \tau = \nabla v = \nabla w = \frac{d\vec{V}}{dt} = 0$$

Es decir no hay esfuerzos de corte. Además definimos Presión como:

$$P = \frac{d\vec{F}}{dA} \cdot (-\hat{n}) \quad , \quad \text{Dirección opuesta a la normal}$$

La ecuación de equilibro $\vec{F}_{\text{superficiales}} + \vec{F}_{\text{másicas}} = 0$ nos lleva a la **Ecuación fundamental de la Hidrostática**:

$$\boxed{\nabla P = \rho \vec{f}}$$

En general tenemos que $\vec{f} = -g\hat{\mathbf{k}}$ por lo que tenemos:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \longrightarrow P - P_0 = -\rho g(z - z_0) \longrightarrow P + \gamma z = P_0 + \gamma z_0$$

lo que implica que planos horizontales son isobáricos.

Si los cambios de presión son importantes tenemos que considerar la compresibilidad, así un sistema de ecuaciones en los líquidos compresibles nos deja (conociendo la masa específica y la presión en un punto):

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dP} = \frac{1}{E} \to \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = \frac{P - P_0}{E} \to \rho = \rho_0 \exp\left(\frac{P - P_0}{E}\right)$$

Ahora usando que:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\rho_0 \exp\left(\frac{P - P_0}{E}\right) g \to \boxed{P = P_0 - E \ln\left(\frac{E + \rho_0 g(z - z_0)}{E}\right)}$$

Para los gases debemos considerar el siguiente modelo:

$$\vec{f} = -g\hat{\mathbf{k}} \quad , \quad P = \rho R T \quad , \quad T = T_0 - \lambda(z - z_0) \quad , \quad \nabla P = \rho \vec{f}$$

Con lo que resuelve:

$$\boxed{P = P_0 \left\{\frac{T_0 - \lambda(z - z_0)}{T_0}\right\}^{\frac{g}{R\lambda}}}$$

Situaciones no gravitacionales: En caso de aceleración tenemos:

$$\nabla P = \rho \vec{f} - \rho \vec{a}$$

Esto implica que habrá mayor presión (mas altura de agua) en el sector mas lejano hacia donde acelera.

Fuerzas sobre superficies planas: La dirección de la fuerza siempre será normal a la superficie, y su ubicación no necesariamente estará en el Centro de Gravedad (CG). Esta resultante debe tener el mismo efecto mecánico (Fuerza y Torque). De la relación vista en clase se deduce que la presión el centro de gravedad es:

$$P_g = \gamma h_g = \gamma y_g \sin\theta$$

Donde h_g es la altura desde la superficie de fluidos hasta el centro de gravedad en Y. Con lo que:

$$R = P_g A$$

Para ubicar a R debemos igualar ambos momentos, lo que nos lleva a que:

$$y_{cp} = \frac{I_{xg}}{y_g A} = \frac{I_{xg}\sin\theta}{h_g A}$$

donde y_{cp} es lo que esta desplazado R desde el centro de gravedad en Y, con lo que la posición de R en Y será:

$$y_c = y_g + \frac{I_{xg}}{y_g A} = h_g \sin\theta + \frac{I_{xg}\sin\theta}{h_g A}$$

Donde I_{xg} es el Momento de Inercia definido en el eje de gravedad en X. Por otro lado es necesario tener mucho cuidado desde donde se definen las coordenadas, en general Z parte desde la superficie del fluido, y lo mismo Y que parte desde la superficie con un ángulo θ entre Y y la superficie de fluido. Este desplazamiento siempre será un poco mas abajo, pues hacia abajo hay mas presión y ahí debe aplicarse la fuerza.

Por otro lado si la superficie no es simétrica en X (perpendicular al plano del dibujo generalmente), la ubicación de R en X se verá afectada (y no será en su CG), del mismo procedimiento anterior se tiene que:

$$x_{cp} = \frac{I_{xy}}{y_g A} = \frac{I_{xy}\sin\theta}{h_g A}$$

Con lo que finalmente:

$$x_c = x_g + \frac{I_{xy}}{y_g A} = x_g + \frac{I_{xy}\sin\theta}{h_g A}$$

Por otro lado si $R = P_g A = (P_0 + \gamma h_g)A$, la ecuación de posición estará dada por:

$$y_c = y_g + \frac{\gamma I_{xg}\sin\theta}{R} = y_g + \frac{\gamma I_{xg}\sin\theta}{(P_0 + \gamma h_g)A}$$

Unas ecuaciones útiles:

$$I_{xg} = \int_A y^2 dA \quad , \quad I_{xy} = \int_A yx dA$$

Donde siempre los límites de integración de las integrales deben ser definidos desde su CG. Por otro lado:

$$y_g = \frac{1}{A}\int_A y dA \quad , \quad x_g = \frac{1}{A}\int_A x dA$$

Resumen I2 - Mecánica de Fluidos

Fuerzas sobre superficies curvas: Para una superficie sumergida tenemos:

$$dR = P(-\hat{n})dA$$

Si ponemos:

$$\vec{R} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}} + R_z\hat{\mathbf{k}}$$

Esto implica que

$$R_x = \vec{R} \cdot \hat{\mathbf{i}}$$

Así:

$$R_x = -\int_S P(\hat{n} \cdot \hat{\mathbf{i}})dA = -\int_S PdA_x$$

Es decir que las componentes horizontales de R_x y R_y son iguales a las que ejerce el fluido sobre una superficie plana vertical de area igual a la proyección ortogonal de la superficie en la dirección de la componente xy. Por otro lado para la fuerza vertical:

$$R_z = -\int_S PdA_z = -\int_S \gamma DdA_z = \gamma\forall_{\text{sobre la superficie}}$$

El punto de aplicación de las componentes horizontales cumplen la misma relación que en el pasado en superficies planas. Así por ejemplo si consideramos que es simétrica en X, tenemos que y es la fuerza horizontal, así como antes:

$$R_h = P_g A_{proy} = \gamma h_g A_{proy} = \gamma y_g \sin\theta A_{proy}$$

con la ubicación como antes, (CP corresponde al desplazamiento hacia abajo del CG):

$$y_{\text{CP}} = -\frac{I_{xg}\sin\theta}{h_g A_{proy}}$$

Por otro lado para posicionar la fuerza vertical usamos que lo podemos hacer solo si es simétrico en el otro eje (un eje horizontal es simétrico) y estará ubicado en el eje x en el centroide del volumen, es decir:

$$x_v = \frac{1}{\forall}\int_\forall x d\forall$$

Fuerzas sobre cuerpos sumergidos: Dada la diferencia de presión en un cuerpo sumergido (las fuerzas horizontales se cancelan) se produce el principio de Arquímedes que dice que se produce una fuerza vertical hacia arriba de:

$$E = \gamma\forall_c$$

Cuerpos Flotantes: Es claro que los cuerpos flotantes, si el cuerpo es homogeneo, el peso se aplicará en el Centro de gravedad del cuerpo (G), y el Empuje se aplicará mas abajo del Centro de gravedad del cuerpo, en el CG del fluido desplazado (C) (puesto que $\forall_c < \forall_0$, $\forall_c$ es el volumen desplazado). Si recordamos el cuaderno la condición de equilibro es que si $\overline{CM} > \overline{CG}$ será estable y en caso contrario inestable. Donde M es el punto que se une verticalmente desde C' (el nuevo C

luego de un pequeño desplazamiento) y que topa con la recta $\overline{CG}$ (extendiéndola si es necesario). Si trabajamos (revisar cuaderno) llegamos a que:

$$\boxed{\overline{CM} = \frac{I_0}{V_c}}$$

Donde I_0 es la inercia de la superficie en contacto con el fluido, así la condición de estabilidad esta dada por:

$$\boxed{\frac{I_0}{\forall_c} > \overline{CG}}$$

Para el caso general en caso de que haya aceleración podemos poner que

$$\vec{E} = -\int_{\forall} \rho_{\text{fluido}} \vec{f}_m d\forall$$

Mientras que el peso del cuerpo es:

$$\vec{W} = \int_{\forall} \rho_{\text{cuerpo}} \vec{f}_m d\forall$$

donde

$$\vec{f}_m = \vec{f} - \vec{a}$$

si recordamos la Ecuación de la Hidrostática:

$$\nabla P = \rho \vec{f}_m = \rho(\vec{f} - \vec{a})$$

Tensión Superficial: Corresponde a la fuerza por unidad de linea que se produce entre 2 fluidos que no se mezclan (o fluidos con superficies). En general es una fuerza pequeña, que se desprecia y que en general solo influye en fuerzas pequeñas y tamaños pequeños.

Presión al interior de una gota esférica de radio R : Si la esfera esta estática entonces la fuerza de presión es igual a la fuerza producida por la presión es igual a la fuerza producida por la tensión:

$$F_p = F_\sigma \rightarrow \pi R^2 P = \sigma 2\pi R \rightarrow P = \frac{2\sigma}{R}$$

Lo que implica que la presión es inversamente proporcional al radio.

Capilaridad: Recordar lo visto en el cuaderno, donde el tubito de ensayo tenía un hoyo y dado eso, se producía un efecto que en las paredes del tubo se veía el agua un poco mas levantada que afuera del tubo. Así que la tensión superficial es la que hace la diferencia de presión, por lo que:

$$\gamma(\pi R^2)h = 2\pi R\sigma \cos\theta \rightarrow h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\gamma R}$$

Donde el $\cos\theta$ se explica porque el equilibro de fuerzas es en el eje Z.

<u>Análisis Global:</u> La idea de esto es alejarnos un poco de lo particular y tomar valores promedios a cosas generales, como volúmenes fijos que elegimos en el espacio, ya que nos interesa su estudio, llamados volúmenes de control. Al hacer un análisis de estos podemos obtener el **Teorema de Transporte de Reynolds** (recordando que cada propiedad extensiva puede ser escrita como una propiedad intensiva en una integral de volumen de un sistema):

$$\boxed{\left(\frac{DB}{Dt}\right)_{sist} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall_c} b\rho d\forall + \int_{S_c} b\rho(\vec{V}\cdot\hat{n})dA}$$

De aquí podemos deducir varias cosas:

1. **Principio de conservación de la masa:** ($DM/Dt = 0$) si el regimen es permanente ($\partial(\cdot)/\partial t = 0$) y usando un tubo de corriente y valores promedio:

$$\underbrace{\rho_1 V_1 A_1}_{\text{masa que entra}} = \underbrace{\rho_2 V_2 A_2}_{\text{masa que sale}}$$

   Recordemos que la integral

$$\int_{S_c} V\cdot\hat{n}dA = Q$$

   corresponde al caudal volumétrico (gasto) y que nos dice cuanto volumen de agua pasa por unidad de tiempo.

2. **Primera Ley de la Termodinámica:** Si consideramos un volumen de control, con entrada de calor ($\dot{C}$) y salida externa de energía ($\dot{W}_e$) se tiene en forma general:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall_c}\rho e d\forall + \int_{S_c}\rho\left(e+\frac{P}{\rho}\right)(\vec{V}\cdot\hat{n})dA = \dot{C} - \dot{W}_\mu - \dot{W}_e}$$

   Donde

$$e = gz + \frac{V^2}{2} + u(T)$$

   corresponde a la energía específica, $u(T)$ corresponde a la energía interna específica (dependiente de la T°) y $\dot{W}_\mu$ es la potencia debido a esfuerzos viscosos (que en general se desprecia). La primera integral representa la variación de energía en el volumen de control, y la segunda integral representa el flujo de energía asociado a la superficie de control mas la potencia de la presión.

   Ahora si consideramos el regimen permanente, despreciamos la potencia de la viscosidad, usamos un tubo de corriente, consideramos valores promedios y despejamos de un lado a otro:

$$\boxed{\rho_1 Q_1\left(gz_1 + \frac{V_1^2}{2} + \hat{h}_1\right) + \dot{C} = \rho_2 Q_2\left(gz_2 + \frac{V_2^2}{2} + \hat{h}_2\right) + \dot{W}_e}$$

   Donde $\hat{h} = u + P/\rho$, y lo anterior quiere decir que la potencia que entra es igual a la potencia que sale. Ahora hagamos 2 casos:

a) **Un gas**; estos cumplen que

$$\left.\frac{d\hat{h}}{dT}\right|_{P\ cte} = c_p \longrightarrow \hat{h}_2 - \hat{h}_1 \approx c_p(T_2 - T_1)$$

Así si asumimos que no hay transferencia de calor, ni hay elementos externos, y además el flujo es horizontal ($z_1 = z_2$) nos queda y dada la ecuación de conservación de masa ($\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2$):

$$\boxed{\frac{V_1^2}{2} + c_p T_1 = \frac{V_2^2}{2} + c_p T_2}$$

b) **Un líquido**; en general estos son incompresibles e isotérmicos, por lo que si asumimos un proceso adiabático, y despreciamos les esfuerzos viscosos, y usando la ecuación de conservación de la masa, podemos dividir por $\gamma Q = g\rho Q$:

$$\boxed{z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{\dot{W}_e}{\gamma Q}}$$

Que es la ecuación de Bernoulli si quitamos los elementos externos ($\dot{W}_e = 0$).

Si queremos nosotros ganar energía debemos poner una turbina, y por lo tanto $\dot{W}_e > 0$ (para que energía en 2 sea menor y se cumpla la igualdad), y si queremos darle energía, ponemos una bomba y por ende $\dot{W}_e < 0$ (para que energía 2 sea mayor y se cumpla la igualdad). Las turbinas y bombas tienen ajustada una eficiencia $\eta < 1$, que hace que nosotros (la humanidad) siempre pierda =(. Así si llamamos a $\dot{W}_t$ a la ganancia real de energía que nos entrega la turbina y $\dot{W}_b$ a la entrega real de energía que nosotros le damos al sistema, entonces tenemos:

i. Para la turbina:

$$\dot{W}_t = \eta_t \cdot \dot{W}_e$$

pues la energía real que ganamos es menor a la ideal.

ii. Para la bomba:

$$\dot{W}_b = \frac{\dot{W}_e}{\eta_b}$$

pues la energía real que necesitamos gastar es mayor que la que gana el sistema.

Coeficiente de Coriolis: A veces ocurre que usar velocidades promedio no es valido y es necesario ajustarla con un coeficiente:

$$\int_{S_1} \frac{V^2}{2}(\vec{V}\cdot\hat{n})dA \approx \alpha \cdot \frac{V_1^2}{2} Q \longrightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{V_1^2 Q}\int_{S_1} V^2(\vec{V}\cdot\hat{n})dA}$$

Esto, ocurre porque a veces la velocidad desestima la energía cinética (en general pues $\alpha \geq 1$) Así la ecuación queda (sin elementos externos):

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \alpha\frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \alpha\frac{V_2^2}{2g}$$

3. **Conservación de la cantidad de movimiento:** Usando la segunda Ley de Newton:

$$\sum F_s + \sum F_m = \frac{D}{Dt}(m\vec{V})$$

Usando el **Teorema de Transporte de Reynolds**:

$$\sum F_s + \int_{\forall_c} \rho \vec{f} d\forall = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall_c} \rho \vec{V} d\forall + \int_{S_c} \rho \vec{V}(\vec{V} \cdot \hat{n}) dA$$

Si asumimos un regimen permanente y consideramos un tubo de corriente con una Fuerza Superficial y un Peso, tenemos:

$$\vec{F}_s + \vec{W} = \int_{S_1} + \int_{S_2} \left\{ \rho \vec{V}(\vec{V} \cdot \hat{n}) dA \right\}$$

Usando valores promedios y asumiendo un fluido incompresible nos queda:

$$\boxed{\vec{F}_s + \vec{W} = \rho Q(\vec{V}_2 - \vec{V}_1)}$$

Esta es una ecuación vectorial que tendrá 3 componentes.

Coeficiente de Boussinesq: Si la distribución de velocidad no es uniforme debemos corregir la cantidad de movimiento usando:

$$\beta_1 \rho \vec{V}_1 Q = \int_{S_1} \rho \vec{V}(\vec{V} \cdot \hat{n}) dA \longrightarrow \boxed{\beta_1 = \frac{1}{V_1 Q} \int_{S_1} V \vec{V} \cdot \hat{n} dA = \frac{1}{V_1 Q} \int_{S_1} V^2 dA}$$

4. **Conservación del Momentum Angular:**

$$\boxed{M_{\text{superficial}} + M_{\text{másicos}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall_c} \rho(\vec{r} \times \vec{V}) d\forall + \int_{S_c} \rho(\vec{r} \times \vec{V})(\vec{V} \cdot \hat{n}) dA}$$

Cálculo de perdidas por fricción en una tubería: Si asumimos $\tau > 0$, un esfuerzo de corte, entonces habrá perdidas por fricción, usando la conservación de masa en el eje $\hat{n}$ hacia la derecha, en un tubo de corriente con inclinación θ hacia abajo:

$$P_1 A_1 - P_2 A_2 - \tau \pi D L - W \sin\theta = \rho Q(V_2 - V_1)$$

Si asumimos $A = \text{cte}$ implicará que $V_1 = V_2$, escribimos el peso como $W = \rho g \left(\frac{\pi D^2 L}{4} \right)$ y escribimos $\sin\theta = \frac{z_1 - z_2}{L}$, si introducimos todos estos cambios en la ecuación y dividimos por $\frac{\pi D^2}{4} \rho g$ nos queda:

$$\boxed{\left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma} \right) = \frac{4 \tau L}{\gamma D}}$$

Lo que implica que las perdidas de energía por fricción se pierden en la cota piezométrica, linealmente respecto al largo e inversamente proporcional respecto al diámetro.

Cálculo de perdidas por singularidades: En un tubo de corriente dado un cambio abrupto de area, podemos usar la ecuación de conservación de momentum (usando solo el área mayor), mas la ecuación de Bernoulli agregando un termino ΔE_s, y asumiendo un cambio de área horizontal, podemos cancelar los z y despejar:

$$\Delta E_s = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} + \frac{P_1 - P_2}{\gamma}$$

Usando de conservación del momentum:

$$P_1 A_2 - P_2 A_2 = \rho Q (V_2 - V_1)$$

y la conservación de la masa

$$V_1 A_1 = V_2 A_2$$

obtenemos:

$$\Delta E_s = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$$

y nuevamente usando que $V_1 A_1 = V_2 A_2$ tenemos:

$$\boxed{\Delta E_s = \frac{V_1^2}{2g}\left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right)^2}$$

Salto Hidráulico: Cuando se producía en una tubería, donde un caudal Q viaja desde (1) a (2), un cambio de altura podía producir vorticidad y perdidas de energía. Así si asumíamos un régimen permanente, fluido incompresible y si asumíamos en (1) y (2) (los lugares fuera del cambio de área) distribución hidrostática. Dado esto último podemos determinar la altura h_1 (si el fluido tiene ancho 1 perpendicular a la hoja) conservación de momentum en el eje x:

$$\int_0^{h_1} \underbrace{\gamma(h_1 - z)}_{P_1(z)} \cdot \underbrace{1 \cdot dz}_{dA} - \int_0^{h_2} \gamma(h_2 - z) 1 \cdot dz = \rho Q (V_2 - V_1)$$

y usando continuidad:

$$Q = V_1 h_1 \cdot 1 = V_2 \cdot h_2 \cdot 1 \longrightarrow V_1 = \frac{Q}{h_1} \quad \wedge \quad V_2 = \frac{Q}{h_2}$$

Dado esto, y resolviendo la integral llegamos a:

$$\frac{\gamma}{2}(h_1^2 - h_2^2) = \rho Q^2 \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1}\right)$$

Planteando la cuadrática:

$$(h_2) h_1^2 + (h_2^2) h_1 - \frac{2Q^2}{g} = 0$$

entonces resolviendo:

$$\boxed{h_1 = -\frac{h_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{h_2}{2}\right)^2 + \frac{2Q^2}{g h_2^2}}}$$

Queda evidentemente descartado el negativo.

Para calcular las perdidas de energías aprovechamos nuevamente la no acumulación de energía en el $\forall_c$ con lo que usamos $E_1 - E_2 = E_{lost}$ así que:

$$\int_{S_1} + \int_{S_2} \left\{ \left(gz + \frac{P(z)}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) \rho(\vec{V} \cdot \hat{n}) dA \right\} = -\dot{W}_p$$

Usando que $\dfrac{P_1(z)}{\rho} = gh_1 - gz$ y $\dfrac{P_2(z)}{\rho} = gh_2 - gz$ y que $dA = 1 \cdot dz$ podemos resolver las 2 integrales anteriores teniendo cuidando con $\vec{V} \cdot \hat{n}$ llegando a:

$$\left(gh_2 + \frac{V_2^2}{2} - gh_1 - \frac{V_1^2}{2} \right) \rho Q = -\dot{W}_p$$

que nos entrega finalmente agrupando términos:

$$\boxed{h_1 + \frac{V_1^2}{2g} = h_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{\dot{W}_p}{\gamma Q}}$$

es decir que la energía entrega que entra es igual a la energía que sale. Además podemos usar que $V_i = Q/h_i$ y usando la ecuación de momentum para obtener:

$$\boxed{\frac{\dot{W}_p}{\gamma Q} = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1 h_2}}$$

Volumen de control a velocidad V_0 constante: Para ello simplemente usar las transformaciones de Galileo para un observador fijo en tierra, así para la conservación de la masa:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall_c} \rho d\forall + \int_{S_c} \rho(\vec{V} - \vec{V_0}) \cdot \hat{n} dA = 0$$

Volumen de control deformable: Consideremos un fluido que es apretado $\frac{\partial l}{\partial t} = -u \rightarrow l(t) = l_0 - ut$ Para la conservación de la masa:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall_c} \rho d\forall + \int_{S_c} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA = 0$$

donde la segunda integral es claramente 0, resolviendo la integral tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A l) = 0 \rightarrow l \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial l}{\partial t} = 0$$

Resolviendo la EDO reemplazando $l(t)$ y usando que $\partial l / \partial t = -u$ que resuelve:

$$\boxed{\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = -\ln\left(\frac{l_0 - ut}{l_0}\right)}$$

Resumen I3 - Mecánica de Fluidos

Análisis Puntual:

1. **Conservación de la Masa:** Usando el Teorema de la Divergencia (Gauss-Ostrogradsky) sobre la conservación de la masa en análisis global, y descartando la integral debido a un volumen cualquiera tenemos:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}\rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0}$$

Si el fluido es incompresible ($\vec{\nabla}\rho = \partial\rho/\partial t = 0$) tenemos entonces:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$

2. **Conservación de la cantidad de movimiento:**

   a) **Aceleración:** Recordemos que desde el punto de vista de Euler:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}}$$

   Donde el primer término recibe el nombre de aceleración local y el segundo de aceleración convectiva o advectiva. Notemos que si: $\vec{V} = u(x, y, z, t)\hat{\mathbf{i}} + v(x, y, z, t)\hat{\mathbf{j}} + w(x, y, z, t)\hat{\mathbf{k}}$ entonces:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial v}{\partial t}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial w}{\partial t}\hat{\mathbf{k}} \quad \wedge \quad \left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{V} = \left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}u\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}v\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}w\right)\hat{\mathbf{k}}$$

   b) **Rotación y Vorticidad**: Definimos la **Rotación** (tendencia del elemento de fluido a girar sobre si mismo) como

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \times \vec{V}$$

   y definimos la **Vorticidad** como el doble de la rotación:

$$\boxed{\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V}}$$

   Así:

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} &= \omega_x\hat{\mathbf{i}} + \omega_y\hat{\mathbf{j}} + \omega_z\hat{\mathbf{k}} \\ &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

   Y en cilíndricas:

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} &= \omega_r\hat{\mathbf{r}} + \omega_\theta\hat{\theta} + \omega_z\hat{\mathbf{k}} \\ &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\hat{\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\ u_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

   Además como sabemos:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0 \rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{\Omega} = 0}$$

   por lo que podemos definir líneas de vorticidad (la vorticidad es conservativa).

c) **Circulación:** Definimos la circulación como (y usando el teorema de Stokes):

$$\Gamma = \oint_{\partial S} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{V} \right) \cdot d\vec{S}$$

Así la **Conservación de momentum** en **fluidos ideales** ($\mu = 0$), usando el Teorema de la Divergencia en la conservación de momentum en análisis global queda determinada la **ecuación de Euler:**

$$\boxed{\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} \right] = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{f}}$$

De esto tenemos 3 ecuaciones y 4 incógnitas. Ahora consideremos un **fluido incompresible**, y pongamos la ecuación de continuidad (conservación de la masa) $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ y usemos la siguiente identidad vectorial:

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{V} \cdot \vec{V}) - \vec{V} \times \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{V})}_{\Omega}$$

Por lo que si ahora asumimos un **régimen permanente** ($\partial \vec{V}/\partial t = 0$) e **irrotacional** ($\vec{\Omega} = 0$) y un **campo de fuerzas terrestre** $\vec{f} = -g\hat{\mathbf{k}} = -g\vec{\nabla} z$ nos queda (son 5 condiciones, en negritas) la **ecuación de Bernoulli**:

$$\vec{\nabla} \left(z + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} \right) = 0 \to z + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = \text{cte}$$

3. **Ecuación de Euler en coordenadas naturales:** En coordenadas naturales (2D) $\hat{s}$ y $\hat{n}$ podemos obtener que en una linea de corriente (dirección $\hat{s}$) la ecuación de Bernoulli se cumple, incluso si el fluido tiene vorticidad. Así tenemos en el eje $\hat{s}$ en régimen permanente:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{V^2}{2g} + \frac{P}{\gamma} + z \right) = 0 \to \frac{V^2}{2g} + \frac{P}{\gamma} + z = \text{cte}$$

Y en eje $\hat{n}$:

$$\frac{V^2}{Rg} = \frac{V^2}{g}\kappa = \frac{\partial}{\partial n} \left(z + \frac{P}{\gamma} \right)$$

Donde κ es la curvatura y $R = \frac{1}{\kappa}$ es el radio de curvatura. En las rectas la curvatura es 0 y por ende el radio de curvatura infinito. Así en las corrientes rectas, la cota piezométrica se conserva.

En el caso que el régimen sea **impermanente**, tenemos en el eje $\hat{s}$:

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = g\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{V^2}{2g} + \frac{P}{\gamma} + z \right)$$

Así podemos simplemente integrar desde una posición (1) a otra posición (2) si la tubería tiene largo L en ese intervalo:

$$-\frac{dV}{dt}L = g \left[(z_2 - z_1) + \frac{P_2 - P_1}{\gamma} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} \right]$$

Lo que resta es resolver la EDO, y usar intervalos apropiados para cancelar cosas.

<u>Teoría del Flujo Potencial (2D):</u> Para esta teoría asumiremos 4 cosas:

1. Fluido Incompresible: $\rho = \text{cte} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$
2. Fluido ideal: $\mu = 0$
3. Flujo Irrotacional: $\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$
4. Régimen Permanente (no es necesario, solo para efectos de este curso): $\partial(\cdot)/\partial t = 0$

Definiremos 2 funciones de distintas formas:

1. **Función Potencial** $\Phi(x, y)$: Dado que $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ entonces podemos escribir: $\vec{V} = \vec{\nabla}\Phi$. Así:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \wedge \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

   Y si luego usamos la compresibilidad ($\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$) tenemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\Phi = \nabla^2 \Phi = 0$$

   La ecuación de Laplace, que es lineal.

2. **Función de Corriente** $\Psi(x, y)$: Si ahora usamos que $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ entonces tenemos que existe $\Psi(x, y)$ que cumple:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \wedge \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

   que en efecto cumple que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} = 0$$

   Así que si ahora usamos que el fluido es irrotacional $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ tendremos:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nabla^2 \Psi = 0$$

   Nuevamente la ecuación de Laplace.

   Dado que las líneas de corriente están determinadas usando:

$$\vec{V} \times d\vec{s} = 0 \rightarrow \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \rightarrow -vdx + udy = 0 \rightarrow d\Psi = 0$$

   Así por lo tanto Ψ no varía en las líneas de corriente y por lo tanto $\Psi(x, y) = C$ define una línea de corriente. Así $\vec{\nabla}\Psi \perp \vec{\nabla}\Phi$ y en 2D: $\Psi \perp \Phi$.
   Y como en fluido ideal las superficies solidas las puedo modelar como líneas de corriente, tenemos que líneas de corriente son posibles sólidos.

Funciones analíticas complejas para solucionar la Ec. de Laplace: Dado que las funciones complejas analíticas $F(z)$ cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann; luego como $z = x+iy = re^{i\theta}$ con $i^2 = -1$ se tendrá:

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

que es armónica, es decir:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

válidas tanto para la parte real e imaginaria.

Así funciones como $F(z) = Uz$, U cte corresponde a un flujo uniforme horizontal y $F(z) = iUz$ corresponde a un flujo uniforme vertical. Funciones como $F(z) = \frac{a}{z}$ corresponden al doblete, $F(z) = iA \ln z$ corresponde a un fluido que rota y $F(z) = A \ln z$ corresponde a un flujo de líneas que salen del origen (ignorar posibles polos en el infinito o en el origen que hacen que la función no sea analítica).

La superposición de funciones (aprovechando la linealidad de la ecuación de Laplace) me permite generar distintos flujos que existan.

Flujo Viscoso: Si definimos $\mathcal{T}$ como la matriz de roces viscosos en todas las combinaciones (3×3) tendremos las **ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles (3D)** dada por:

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}\right) = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{f} + \vec{\nabla}\mathcal{T}$$

Si el fluido es Newtoniano:

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}\right) = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{f} + \mu\vec{\nabla}^2\vec{V}}$$

donde

$$\vec{\nabla}^2\vec{V} = (\nabla^2 u, \nabla^2 v, \nabla^2 w)$$

No existe solución analítica para esto ni obviamente para fluidos compresibles. ¡Resuelvalos, y podría ganar 1 millón de dolares!

1. **Fluido que se mueve en una dirección (en 2D)** $\vec{V} = u\hat{\mathbf{i}}$, si dividimos por ρ las NSE, tenemos ($\nu = \mu/\rho$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} - g\hat{\mathbf{k}} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Usando la ecuación de continuidad $\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0 \rightarrow \partial u/\partial x = 0$ y si asumimos régimen permanente ($\partial u/\partial t = 0$) tenemos en el eje x:

$$\frac{-1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \rightarrow \boxed{\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial P}{\partial x} = 0}$$

En la dirección y tenemos $0 = -\partial P/\partial y$ entonces la presión no depende de y y asumimos que la velocidad no depende de x (por continuidad), solo de y y entonces $\partial P/\partial x$ no depende de x por lo que:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \text{cte} = \lambda$$

así podemos resolver la EDO integrando 2 veces:

$$u(y) = \frac{\lambda}{2\mu}y^2 + yC_1 + C_2$$

si usamos las condiciones de borde $u(y=0) = 0 \ \wedge \ u(y=e) = \mathcal{V}$ resolvemos:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}y^2 + \left(\frac{\mathcal{V}}{e} - \frac{e}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\right)y$$

La ecuación anterior explica que para mover un fluido de izquierda a derecha es moviendo la placa de arriba hacia la derecha. Otra forma es tener un gradiente de presión, por ejemplo si $\mathcal{V} = 0$ podemos también generar un movimiento hacia la derecha con un gradiente de presiones negativo $\partial P/\partial x < 0$, esto debido que el fluido se mueve de zonas de mayor presión a menor presión. Combinaciones de $\mathcal{V}$ y $\partial P/\partial x$ me permite generar distintos tipos de u, pero siempre serán parabólicos.

2. **Flujo Laminar en una tubería circular:** Si usamos en las NSE coordenadas cilíndricas para un fluido laminar Newtoniano que se mueve solo en el eje z ($\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \partial w/\partial z = 0$), además $\partial P/\partial r = \partial P/\partial\theta = 0 \rightarrow P \equiv P(z)$ y asumimos régimen permanente ($\partial w/\partial t = 0$) se tiene en la coordenada del eje z la ecuación:

$$0 = -r\frac{\partial P}{\partial z} + \mu\frac{\partial w}{\partial r} + \mu r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$$

donde nuevamente $\partial P/\partial z$ no depende de r ni θ (mirar las otras componentes de la ecuación). Así para $\tau = \mu\dfrac{\partial w}{\partial r}$ tenemos:

$$\frac{dP}{dz} = \frac{1}{r}\tau + \frac{\partial\tau}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\tau r)$$

Que integrando y despejando nos deja:

$$\tau = \frac{dP}{dz}\frac{r}{2} + \frac{C_1}{r}$$

Dado que el esfuerzo de corte no es infinito en 0, $|\tau| < \infty$ no queda otra que $C_1 = 0$, luego reemplazando τ:

$$\mu\frac{dw}{dr} = \frac{dP}{dz}\frac{r}{2}$$

Que si resolvemos:

$$w(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{dP}{dz}r^2 + C_2$$

Si usamos la condición de borde que $w(r=R) = 0$ nos quedará:

$$w(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{dP}{dz}\left(r^2 - R^2\right)$$