

Resumen I1 - Señales y Sistemas

Sea $f(x)$ función compleja, entonces:

$$e(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \quad \text{Parte Par}$$

$$o(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \quad \text{Parte Impar}$$

Además:

$$h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f^*(-x)) \quad \text{Parte Hermitiana}$$

$$a(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f^*(-x)) \quad \text{Parte Anti-hermitiana}$$

Donde una función hermitiana cumple que su parte real es par, y su parte imaginaria es impar; y la función anti-hermitiana cumple que su parte real es impar, y su parte imaginaria es par.

Funciones útiles:

$$\blacksquare e^{i2\pi x} = \cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x)$$

$$\blacksquare \text{Gauss}(x) = e^{-\pi x^2} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \text{Gauss}(x) dx = 1$$

$$\blacksquare 1(x) = 1$$

$$\blacksquare \wedge(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\blacksquare \delta(x) = 0, \quad x \neq 0 \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$\blacksquare \sqcap(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1/2 \\ 0, & |x| > 1/2 \end{cases}$$

$$\blacksquare \text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

$$\blacksquare \Gamma(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \rightarrow \Gamma'(x) = \delta(x) \rightarrow \int_{-\infty}^x \delta(x) dx = \Gamma(x)$$

$$\blacksquare \sqcup(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n)$$

- $\Uparrow(x) = \frac{1}{2} \left[\delta\left(x + \frac{1}{2}\right) + \delta\left(x - \frac{1}{2}\right) \right] \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \Uparrow(x) dx = 1$
- $\Uparrow\Downarrow(x) = \frac{1}{2} \left[\delta\left(x + \frac{1}{2}\right) - \delta\left(x - \frac{1}{2}\right) \right] \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \Uparrow\Downarrow(x) dx = 0$

Propiedad del Cedazo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

$$f(x) * \delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \delta(x - \xi) d\xi = f(x)$$

Impulso de una función:

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|} \quad x_n \text{ son raíces} \rightarrow f(x_n) = 0$$

Linealidad:

$$L\{\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)\} = \alpha L\{f_1(x)\} + \beta L\{f_2(x)\}$$

Invariancia:

$$f(x) \rightarrow g(x) \Rightarrow f(x - T) \rightarrow g(x - T)$$

Convolución:

$$f(x) * g(x) = g(x) * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x - \xi) d\xi$$

Propiedad de la derivada:

$$\frac{d}{dx} \{f(x) * g(x)\} = f'(x) * g(x) = f(x) * g'(x)$$

Respuesta al impulso: En un sistema LIT es muy conveniente obtener la salida del sistema cuando se le pone de entrada un impulso, dicho resultado se conoce como respuesta al impulso $h(t)$ y es muy útil ya que en estos sistemas entrega la información de salida para todas las frecuencias posibles, que implica que para cualquier función $f(t)$ su salida $g(t)$ simplemente será:

$$g(t) = f(t) * h(t)$$

Series de Fourier: Toda función periodica con periodo T puede escribirse en su serie de Fourier:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 x) + b_k \sin(k\omega_0 x) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 x + \phi_k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 x} \end{aligned}$$

Con las relaciones:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \omega_0 &= \frac{2\pi}{T} \\ \blacksquare \quad a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(x) dx \\ \blacksquare \quad a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(x) \cos(k\omega_0 x) dx \\ \blacksquare \quad b_k &= \frac{2}{T} \int_T f(x) \sin(k\omega_0 x) dx \\ \blacksquare \quad A_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ \blacksquare \quad \tan(\phi_k) &= -\frac{b_k}{a_k} \\ \blacksquare \quad C_k &= \frac{1}{T} \int_T f(x) e^{-ik\omega_0 x} dx \quad \wedge \quad C_0 = a_0 \\ \blacksquare \quad &\left. \begin{aligned} a_k - ib_k &= 2C_k \\ a_k + ib_k &= 2C_{-k} \end{aligned} \right| \end{aligned}$$

Transformada de Fourier: $f(x) \rightarrow F(u)$:

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi ux} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(2\pi ux) dx - i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(2\pi ux) dx \end{aligned}$$

La transformada inversa:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{i2\pi ux} du$$

Simetrías de la TF:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{e(x)\} &\rightarrow \operatorname{Re}\{E(u)\} \\ i\operatorname{Im}\{e(x)\} &\rightarrow i\operatorname{Im}\{E(u)\} \\ \operatorname{Re}\{o(x)\} &\rightarrow i\operatorname{Im}\{O(u)\} \\ i\operatorname{Im}\{o(x)\} &\rightarrow \operatorname{Re}\{O(u)\} \end{aligned}$$

Propiedades de la TF:

1. Dualidad:

$$F(u) \rightarrow f(-x)$$

2. Linealidad:

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \rightarrow \alpha F(u) + \beta G(u)$$

3. Escalamiento:

$$f(ax) \rightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{u}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R}$$

4. Desplazamiento:

$$f(x-a) \rightarrow e^{-i2\pi au} F(u)$$

5. Convolución:

$$f(x) * g(x) \rightarrow F(u) G(u)$$

6. Producto:

$$f(x)g(x) \rightarrow F(u) * G(u)$$

7. Modulaci3n:

$$f(x) \cos(wx) \rightarrow \frac{1}{2}F\left(u - \frac{w}{2\pi}\right) + \frac{1}{2}F\left(u + \frac{w}{2\pi}\right)$$

8. Teo. de la Potencia:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g^*(x)dx = \int_{\mathbb{R}} F(u)G^*(u)du$$

9. Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 du$$

10. Autocorrelaci3n:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi)f(x + \xi)d\xi \rightarrow |F(u)|^2$$

11. Desplazamiento de Frecuencia:

$$e^{iax}f(x) \rightarrow F\left(u - \frac{a}{2\pi}\right)$$

12. Derivada:

$$f'(x) \rightarrow i2\pi uF(u) \quad \wedge \quad -i2\pi xf(x) \rightarrow F'(u)$$

Funci3n de Transferencia: $H(u)$ Se llama as3 a la transformada de Fourier a la respuesta del impulso de un sistema. Como en los sistemas LIT se cumple $g(t) = f(x) * h(x)$ entonces tenemos:

$$H(u) = \frac{G(u)}{F(u)}$$

Algunas Transformadas:

$f(x)$	$F(u)$
—	—
$\delta(x)$	$1(u)$
$1(x)$	$\delta(u)$
Gauss(x)	Gauss(u)
$\cos(\pi x)$	$\uparrow\uparrow(u)$
$\uparrow\uparrow(x)$	$\cos(\pi u)$
$\sin(\pi x)$	$-i \uparrow\downarrow(u)$
$\sqcap(x)$	$\text{sinc}(u)$
$\text{sinc}(x)$	$\sqcap(u)$
$\text{sinc}^2(x)$	$\wedge(u)$
$\sqcup(x)$	$\sqcup(u)$
$e^{- x }$	$\frac{2}{1 + (2\pi u)^2}$
$\Gamma(x)$	$\frac{1}{2}\delta(u) - \frac{i}{2\pi u}$
$\text{sgn}(x)$	$-\frac{i}{\pi u}$
$e^{i2\pi nx}$	$\delta(u - n)$