

## Resumen I3 - Señales y Sistemas

**Transformada de Fourier Discreta (DFT):** *Citando a PIM:* Antes de continuar es necesario estudiar la relación entre  $U$  y  $T$ . Una función discreta puede ser periódica solo si el periodo es un múltiplo entero del intervalo de muestreo. Llamemos  $N$  a este múltiplo. En el espacio, el intervalo de muestreo es  $T$  y el periodo es  $1/U$  (el inverso del intervalo de muestreo en la frecuencia), se tiene que  $NT = 1/U$ . O, en la frecuencia, el intervalo de muestreo es  $U$  y el periodo es  $1/T$  (el inverso del intervalo de muestreo en el espacio), se tiene que  $NU = 1/T$ . Es decir:

$$NUT = 1$$

Luego resolviendo la integral, obtenemos la DFT:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}[n] e^{-i2\pi kn/N}$$

Ahora para calcular la inversa se realiza el mismo análisis pero para la DFFT. Obteniéndose la DFT inversa:

$$\tilde{f}[n] = T \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{F}[k] e^{i2\pi kn/N}$$

En general tenemos  $T = 1$  por lo que:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}[n] e^{-i2\pi kn/N}$$

$$\tilde{f}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{F}[k] e^{i2\pi kn/N}$$

De ahora en adelante siempre se tendrá  $T = 1$ .

**Interpretación Matricial:** Tenemos que gracias a la forma discreta de la DFT podemos escribirla como Matriz usando que:

$$\mathbf{F} = \mathcal{W}\mathbf{f}$$

con

$$\mathbf{F} = [F[0] \ F[1] \ \dots \ F[N-1]]^T$$
$$\mathbf{f} = [f[0] \ f[1] \ \dots \ f[n-1]]^T$$

y:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} W^{0 \cdot 0} & W^{1 \cdot 0} & \dots & W^{(N-1) \cdot 0} \\ W^{0 \cdot 1} & W^{1 \cdot 1} & \dots & W^{(N-1) \cdot 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W^{0 \cdot (N-1)} & W^{1 \cdot (N-1)} & \dots & W^{(N-1) \cdot (N-1)} \end{pmatrix}$$

con:

$$W = e^{-i2\pi/N}$$

y  $W^N = W^0$  y que  $W^{N+k} = W^k$ .

A continuación se muestran ejemplos de como calcular rápido  $\mathcal{W}$  para  $N$  potencias de 2. Cada columna representa giros de la frecuencia natural, por ejemplo en el caso  $N = 2$  el giro de la columna 1 (se considerará la primera como columna 0) corresponde a un giro de su frecuencia natural:  $2\pi/2 = \pi$ . Para el caso  $N = 4$  la primera columna girará con frecuencia  $2\pi/4 = \pi/2$ , la segunda lo hará con  $\pi$  y la tercera con  $\frac{3}{2}\pi$ . Esto es completamente análogo si se hace por filas dado que es una matriz simétrica.

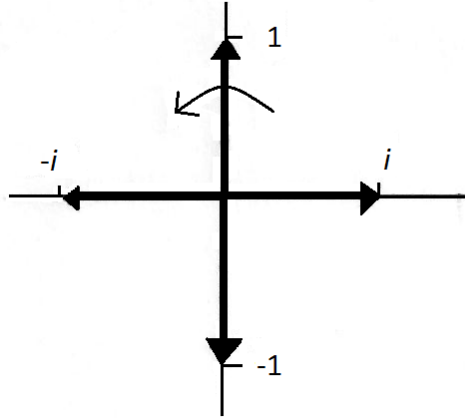


Figura 1: Como rotar la matriz

Para  $N = 2$  tenemos:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \uparrow & \downarrow \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Para  $N = 4$  tenemos:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \uparrow & \leftarrow & \downarrow & \rightarrow \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow \\ \uparrow & \rightarrow & \downarrow & \leftarrow \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}$$

**Propiedades de la DFT:** Las simetrías se encuentran en la página 167 del libro de PIM. Se nombrará como componente continua de la DFT al valor  $\tilde{F}[0]$ .

Si  $\tilde{f}[n] \rightarrow \tilde{F}[k] \wedge \tilde{g}[n] \rightarrow \tilde{G}[k]$  tenemos las siguientes propiedades:

1. Dualidad:

$$\text{DFT}\{\text{DFT}\{\tilde{f}[n]\}\} = \frac{1}{N} \tilde{f}[-n]$$

2. Conjugado:

$$\tilde{f}^*[n] \longrightarrow \tilde{F}^*[-k]$$

3. Inverso:

$$\tilde{f}[-n] \longrightarrow \tilde{F}[-k]$$

Entiéndase  $\tilde{f}[-n]$  como dar vuelta el vector con respecto a 0. Por ejemplo:  
 $(3 \ 5 \ 4 \ 7) = (7 \ 4 \ 5 \ 3)$ .

4. Superposición:

Si  $\tilde{f}[n]$  y  $\tilde{g}[n]$  tienen el mismo periodo, entonces:

$$\tilde{f}[n] + \tilde{g}[n] \longrightarrow \tilde{F}[k] + \tilde{G}[k]$$

5. Desplazamiento:

$\forall a \in \mathbb{Z}$  entonces:

$$\tilde{f}[n - a] \longrightarrow e^{-i2\pi ka/N} \tilde{F}[k]$$

6. Operador de diferencias:

$\forall a \in \mathbb{Z}$  entonces:

$$\Delta_a \tilde{f}[n] = \tilde{f}[n] - \tilde{f}[n - a] \longrightarrow (1 - e^{-i2\pi ka/N}) \tilde{F}[k]$$

7. Suma:

$$\tilde{\varphi}[n] = \tilde{f}[0] + \tilde{f}[1] + \cdots + \tilde{f}[n] = \sum_{j=0}^n \tilde{f}[j] \longrightarrow \frac{\tilde{F}[k] - \tilde{F}[0]}{1 - e^{-i2\pi k/N}} = \tilde{\Phi}[k], \quad k \neq 0$$

en  $k = 0$ :

$$\tilde{\Phi}[0] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\varphi}[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^n \tilde{f}[j]$$

Es necesario comprender que significa  $\tilde{\varphi}[n]$ , para esto notemos que:

$$\tilde{\varphi}[n] = \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}[0] \\ \tilde{\varphi}[1] \\ \vdots \\ \tilde{\varphi}[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}[0] \\ \tilde{f}[0] + \tilde{f}[1] \\ \vdots \\ \sum_{\nu=0}^{N-1} \tilde{f}[\nu] \end{bmatrix}$$

8. Convolución Cíclica:

Si  $\tilde{f}[n]$  y  $\tilde{g}[n]$  tienen periodo de mismo largo, entonces:

$$\tilde{f}[n] * \tilde{g}[n] \longrightarrow N\tilde{F}[k]\tilde{G}[k]$$

9. Producto:

Si  $\tilde{f}[n]$  y  $\tilde{g}[n]$  tienen periodo de mismo largo, entonces:

$$\tilde{f}[n]\tilde{g}[n] \longrightarrow \tilde{F}[k] * \tilde{G}[k]$$

10. Área:

$$\tilde{F}[0] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}[n]$$

11. Valor central:

$$\tilde{f}[0] = \sum_{k=0}^N \tilde{F}[k]$$

12. Rayleigh:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{f}[n]|^2 = N \sum_{k=0}^{N-1} |\tilde{F}[k]|^2$$

**Utilidades:** A veces es necesario cambiar el largo de una señal, para esto podemos hacer 2 cosas.

1. **Estirar y Replicar:** Consiste en replicar (o estirar) la función para alargar su tamaño, esto producirá un estiramiento (o réplica) en la señal en el otro dominio. Entiéndase por estirar colocar ceros entre los valores de la función. Por ejemplo:

$$(1, 3) \rightarrow (2, -1)$$

y por lo tanto:

$$(1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3) \rightarrow (2, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0)$$

Del mismo modo:

$$(1, 3) \rightarrow (2, -1)$$

entonces:

$$(1, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0) \rightarrow \frac{1}{4}(2, -1, 2, -1, 2, -1, 2, -1)$$

En este caso es necesario agregar el termino  $\frac{1}{4}$ , ya que la DFT divide por el largo del vector, y por lo tanto si estiramos en 4 veces (de 2 a 8) el vector, se hará necesario efectuar dicha división. No fue necesario hacerlo en el primer caso, dado que dicha replica nos agrega lo que deberíamos quitar con la división.

2. **Acolchar y Alargar:** Al acolchar una función de largo  $N$ , es decir agregar  $N$  ceros consecutivos, lo más lejano del origen ( $N/2$  si el origen lo ponemos en 0), se producirá un alargamiento de la función en el otro dominio usando una interpolación sinc entre cada par de muestras. Si se agregan  $2N$  se interpolan 2 valores entre cada par, y así sucesivamente. En sentido opuesto también es válida (frecuencia a tiempo).

**Transformada de Fourier Rápida (FFT):** Consiste en aplicar ciertos algoritmos para calcular mas rápido la DFT aprovechando la simetría de la matriz  $\mathcal{W}$ . Destaca el de dividir la función temporal (si es de largo par) en los valores pares e impares. Si hacemos un cambio de variable para cada sumatoria con  $n = 2r$  y  $n = 2r + 1$ , luego agrupando términos, sacando términos fuera de la suma, juntando  $N/2$  donde sea necesario y usando que:

$$W_N = e^{-i2\pi/N}$$

tenemos:

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N} \left( \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{x}[2r] W_{N/2}^{kr} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{x}[2r+1] W_{N/2}^{kr} \right)$$

y llamando  $\tilde{G}[k]$  y  $\tilde{H}[k]$  a la parte par y la impar respectivamente tenemos:

$$2\tilde{X}[k] = \tilde{G}[k] + W_N^k \tilde{H}[k]$$

que queda representada en la siguiente figura:

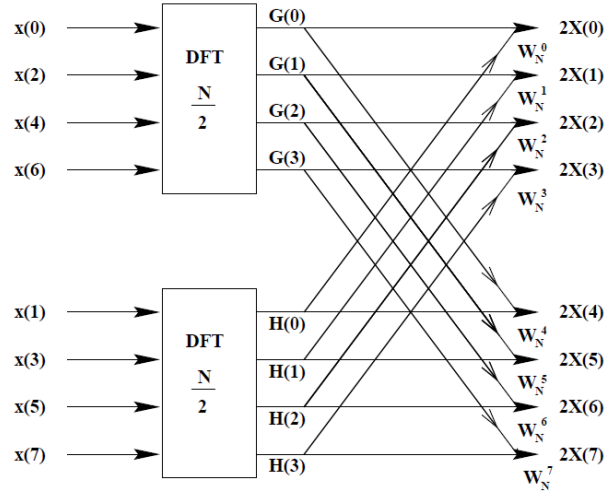


Figura 2: Representación de la FFT para el caso  $N = 8$

**Convolución lineal versus cíclica:** Dado que en los sistemas de entrada y salida se utiliza la convolución lineal y no la cíclica no es posible definir una función de transferencia en el dominio de Fourier discreto. Es posible acolchar las funciones de entrada y respuesta al impulso, para que la convolución cíclica resulta igual que la convolución lineal de las originales. Es necesario agregar suficientes ceros para evitar la aliasión, para esto sera necesario agregar a lo menos  $P - 1$  ceros al vector  $\tilde{x}[n]$  (de largo  $L$ ) o bien  $L - 1$  ceros al vector  $\tilde{h}[n]$  (de largo  $P$ ), en total agregar  $m - 1$  ceros, donde  $m = \min\{P, L\}$ .

### Consideraciones Prácticas:

1. **Aliasión:** Surge de muestrear (Multiplicar por  $\text{rect}(t/T)$ ) una función en el dominio del tiempo a una frecuencia baja, el teorema de Nyquist exige que  $T < 1/2u_c$  es decir que la frecuencia de muestreo  $1/T$  sea mayor a  $1/2u_c$ . Por lo tanto para que **no** ocurra aliasión se necesita que

$$\frac{1}{T} \geq \frac{1}{2u_c}$$

es decir que se cumpla el teorema de Nyquist. En caso contrario, cuando  $1/T < 1/2u_c$ , habrá aliasión, y con esto al intentar recuperar la señal inicial (convolucionando con  $\text{sinc}(t/T)$  en el dominio del tiempo, es decir multiplicar por  $\text{rect}(Tu)$  en el dominio de la frecuencia) obtendremos otra (aquí se esta usando FT).

2. **Interpolación sinc:** Como se explico antes, la interpolación sinc sirve para recuperar la señal que fue muestreada. Para esto se hace una convolución con un sinc, es decir se multiplica por un rect en el espectro (filtro ideal pasabajos). Así se obtiene una señal continua que pasa por las muestras, de ancho de banda limitado y es la mas suave que pasa por dichas muestras. Un problema que puede surgir es por ejemplo con la función Gauss, ya que dicha función tiene un ancho de banda ilimitado ( $\text{Gauss}(x) \rightarrow \text{Gauss}(u)$ ), y al hacer todo este proceso de interpolación sinc, recuperaremos una señal con ancho de banda limitado, y por lo tanto no será igual a Gauss.
3. **Apodización y derrame:** La apodización consiste en tomar solo parte de la señal (hacemos esto en general por posibles problemas de memoria en un computador). Lo mas obvio para apodizar consiste en multiplicar por un rect en el tiempo, el problema es que al hacer esto convolucionamos con un sinc en el espectro, por lo que tendremos una función con ancho de banda ilimitado, que no tiene frecuencia crítica, y se producirá aliasión. Pero también es posible que ocurra derrame, es decir que al muestrear en el dominio de la frecuencia se produce un corrimiento de las muestras. Para que no ocurra este problema en funciones periódicas es necesario considerar una longitud de apodización (del rect) que corresponde a un múltiplo entero del periodo de la función a muestrear. En el caso general la ventana de apodización debe ser suave para evitar el derrame (es decir usar un rect es pésima idea, salvo para funciones periódicas).

**Aproximación de la DFT para la FT:** Para esto se debe utilizar un filtro anti-aliasión, un rect de ancho de banda  $1/T$ , es decir convolucionar con un sinc en el tiempo. Posteriormente apodizamos la función en el dominio del tiempo multiplicamos por un rect de largo  $2T_0$ ,  $\Pi(x/T_0)$  (es decir convolucionar con un sinc( $T_0u$ ) en la frecuencia) pero solo nos interesa la parte de largo  $T_0$ , esto nos exige que el periodo de muestreo sea  $T = T_0/N$ . Luego multiplicamos por  $\sqcap(x/T)$  para muestrear la señal y obtener la señal discreta, lo que nos deja la DTFT (continua y periódica en la frecuencia), y luego muestreamos en el dominio de la frecuencia usando  $\sqcap(T_0u)$  para obtener la respectiva DFT (ver los dibujos en el libro de PIM).

**Transformada de Laplace de Tiempo Discreto (DTLT):** La idea es igual a la LT continua y su relación con la FT, y por lo tanto muestreamos la función y aplicamos LT obteniendo:

$$\tilde{F}(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-snT} \quad \alpha < \text{Re}\{s\} < \beta$$

y su inversa:

$$f[n] = \frac{T}{i2\pi} \int_c^{c+i2\pi/T} \tilde{F}(s)e^{snT} ds \quad \alpha < c < \beta$$

y como aún es válida la relación  $s = \sigma + i2\pi u$  tenemos entonces que:

$$\tilde{F}(s) = \text{DTFT}\{f[n]e^{-\sigma nT}\}$$

**Transformada Z (ZT):** Se define la transformada Z haciendo un cambio de variables en la DTLT,  $z = e^{sT}$ , con lo que obtenemos la transformada Z:

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n}$$

Es extremadamente fácil obtener la ZT a funciones finitas, por ejemplo:

$$(3 \ 4 \ \underline{2} \ 1 \ 5 \ 7) \implies 3z^2 + 4z + 2 + 1z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3}$$

En la Figura 3 se puede ver la relación de como  $\text{Re}\{s\} = \text{cte} \rightarrow |z| = \text{cte}$  e  $\text{Im}\{s\} = \text{cte} \rightarrow \arg(z) = 2T\pi \cdot \text{cte}$

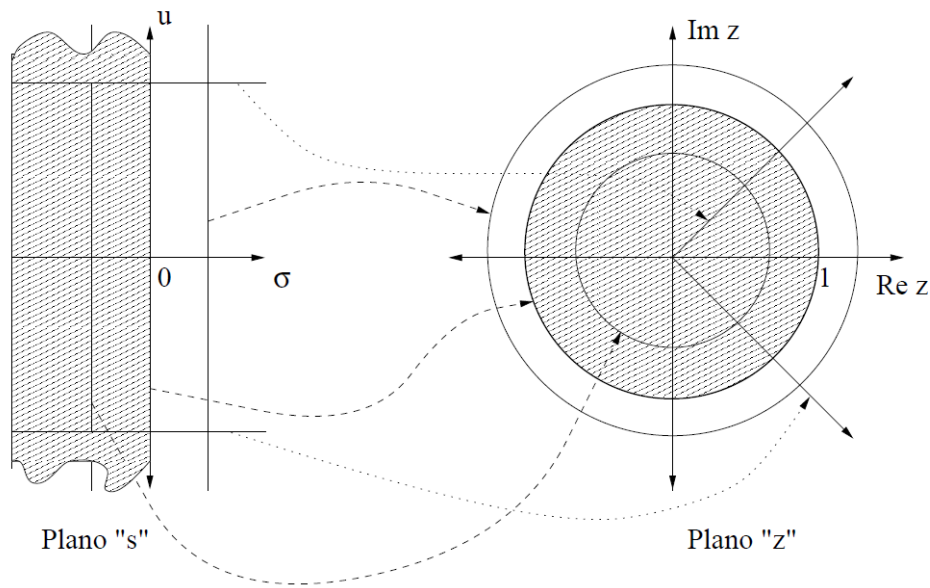


Figura 3: Relación plano  $s$  y plano  $z$

### Regiones de convergencia:

1. Secuencias finitas: Convergen para todo  $z$ , es posible que no converja en el origen.
2. Secuencias infinitas derechas (causales): Convergerán para  $|z| > |\alpha|$ , donde  $\alpha$  será el polo ubicado mas lejos del origen, es decir una circunferencia hacia afuera.
3. Secuencias infinitas izquierdas (anti-causales): Convergerán para  $|z| < |\beta|$ , donde  $\beta$  es el polo ubicado mas cerca del origen, es decir una circunferencia hacia adentro.
4. Secuencias infinitas: Convergerán para  $|\alpha| < |z| < |\beta|$ , donde estos son en general polos, es decir un anillo.

**Estabilidad:** Un sistema será estable si su respuesta al impulso tiende a 0, cuando el tiempo va a infinito. En el dominio  $Z$  significará que la circunferencia unitaria esta dentro de la región de la región de convergencia. Por otro lado si usamos que es estable si la respuesta al impulso esta acotada, cuando el tiempo va a infinito; entonces necesitaremos que la circunferencia unitaria del plano  $z$  sea a lo menos el borde de la región de convergencia.



**Propiedades de la ZT:** Sean  $f[n] \rightarrow F(z)$  con  $r_\alpha < |z| < r_\beta$  y  $g[n] \rightarrow G(z)$  con  $s_\alpha < |z| < s_\beta$  entonces tenemos:

1. Linealidad:

$$af[n] + bg[n] \longrightarrow aF(z) + bG(z) \quad \max\{r_\alpha, s_\alpha\} < |z| < \min\{r_\beta, s_\beta\}$$

2. Inversión:

$$f[-n] \longrightarrow F(z^{-1}) \quad r_\alpha < |z|^{-1} < r_\beta$$

3. Desplazamiento:

$$f[n - m] \longrightarrow z^{-m}F(z) \quad r_\alpha < |z| < r_\beta$$

4. Convolución:

$$f[n] * g[n] \longrightarrow F(z)G(z) \quad \max\{r_\alpha, s_\alpha\} < |z| < \min\{r_\beta, s_\beta\}$$

5. Correlación:

$$f[n] \star g[n] \longrightarrow F(z)G(z^{-1}) \quad \max\{r_\alpha, s_\beta\} < |z| < \min\{r_\beta, s_\alpha\}$$

6. Diferenciación en la frecuencia:

$$nf[n] \longrightarrow -z \frac{d}{dz} F(z) \quad r_\alpha < |z| < r_\beta$$

Notar que de aquí sale:

$$n^2 f[n] \longrightarrow -z \frac{d}{dz} (-z F'(z)) = z F'(z) + z^2 F''(z)$$

7. Escalamiento en la frecuencia:

$$z_0^n f[n] \longrightarrow F(z_0^{-1} z) \quad r_\alpha < \left| \frac{z}{z_0} \right| < r_\beta$$

Si  $z_0$  es complejo la ZT es rotada en el plano Z. El módulo de  $z_0$  produce un escalamiento en el plano  $z$ .

8. Conjugación:

$$f^*[n] \longrightarrow F^*(z^*) \quad r_\alpha < |z| < r_\beta$$

9. Suma:

$$\sum_{k=-\infty}^n f[k] \longrightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}} F(z) \quad r_\alpha < |z| < r_\beta$$

10. Decimación:

$$f_{(k)}[n] \longrightarrow F(z^k) \quad r_\alpha < |z|^{1/k} < r_\beta$$

donde:

$$f_{(k)}[n] = \begin{cases} f[n/k], & \text{si } n \text{ es múltiplo de } k \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

11. Teorema del valor inicial: Si  $f[n]$  es causal.

$$f[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

12. Teorema del valor final:

$$f[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F(z)$$

Solo es valido si los polos de  $(1 - z^{-1})F(z)$  están dentro del círculo unitario.

**Función de transferencia:** Gracias a la propiedad 4 recuperamos esta valiosa información, recordando que en los sistemas LIT se cumple que  $y[n] = h[n] * x[n]$ , tenemos que la función de transferencia, la transformada Z de la respuesta al impulso, es:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

**Algunas Transformadas Z:**

1.

$$\delta[n] \longrightarrow 1 \quad \forall z$$

2.

$$\delta[n - a] \longrightarrow z^{-a} \quad z \neq 0$$

3.

$$\Gamma[n] \longrightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad |z| > 1$$

4.

$$-\Gamma[-(n + 1)] \longrightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad |z| < 1$$

5.

$$\cos[\omega_0 n] \Gamma[n] \longrightarrow \frac{1 - z^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}} \quad |z| > 1$$

6.

$$\sin[\omega_0 n] \Gamma[n] \longrightarrow \frac{z^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}} \quad |z| > 1$$