

## Resumen I2 - Señales y Sistemas

Se define la Transformada de Laplace (LT):  $f(t) \rightarrow F(s)$

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{f(t)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= \mathcal{F}\{f(t)e^{-\sigma t}\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+i2\pi u)t} dt \end{aligned}$$

Donde claramente  $s = \sigma + i2\pi u = \sigma + i\omega$ , entonces:  $\sigma = \Re(s) \wedge 2\pi u = \Im(s)$

Con región de convergencia  $\alpha < \Re\{s\} < \beta$ .

Esto último es muy importante debido a la posibilidad de que 2 funciones tengan la misma LT y solo se distingan por la región de convergencia.

### Regiones de convergencia (ROC):

1. Si  $f(t)$  es una función limitada por la derecha e izquierda ( $f(t) \neq 0, \quad t \in (\alpha, \beta)$ ), entonces es integrable, y por lo tanto su LT converge para todo  $s$ .
2. Si  $f(t) = g(t)\Gamma(t - a)$ , una función limitada por la izquierda ( $f(t) = 0, \forall t < a$ ) entonces la región de convergencia será  $\sigma > \sigma_0$ , osea un semiplano derecho, limitado por la izquierda.
3. Si  $f(t) = g(t)\Gamma(b - t)$ , una función limitada por la derecha ( $f(t) = 0, \forall t > b$ ) entonces la región de convergencia será  $\sigma < \sigma_1$ , osea un semiplano izquierdo, limitado por la derecha.
4. Si  $f(t)$  no está limitada y no es integrable, entonces si sabemos que para algún  $\sigma = \sigma_0$  la transformada converge, entonces la región de convergencia será una franja de plano donde este  $\sigma_0$ .

### Polos y ceros en el plano complejo:

En general tenemos:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Donde  $P(s)$  y  $Q(s)$  son polinomios. Diremos que  $F(s)$  tiene un cero, cuando  $P(s_0) = 0$ , por lo tanto  $s_0$  es un cero. Y diremos que  $F(s)$  tiene un polo, cuando  $Q(s_1) = 0$ , es decir cuando  $F(s)$  explota, y en este caso  $s_1$  es un polo.

Dichos resultados nos entregan información importante sobre la región de convergencia de la LT.

Por ejemplo, si tenemos una función limitada por la izquierda sabemos que convergerá para  $\sigma > \alpha$ , para encontrar dicho  $\alpha$  simplemente usamos el último polo encontrado hacia la derecha, es decir si  $Q(s) = 0$  para  $s = s_0, s_1, s_2$  y tenemos que  $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2$  entonces la región de convergencia estará dada por  $\sigma > \sigma_2$ .

Usando el caso anterior pero para una función limitada por la derecha se tendrá que la región de convergencia será  $\sigma < \sigma_0$

Y en un caso de una función no limitada que sabemos que converge para un  $s_0 < s < s_1$  entonces dicha función tendrá región de convergencia  $\sigma_0 < \sigma < \sigma_1$ .

### Transformada de Laplace inversa:

$$f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st}dt$$

Donde  $c$  es una constante cualquiera dentro de la ROC. Dicho resultado anterior, corresponde a una integral de línea en el eje imaginario. En general esto es 0 aporte y usamos las tablas para ver el resultado de la inversa al ojo.

**Propiedades de la LT:** con  $f(t) \rightarrow F(s) \quad \alpha < \sigma < \beta$

1. Similitud:

$$\begin{aligned} f(at) &\rightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{a}\right) & \alpha < \frac{\sigma}{a} < \beta \\ f(-t) &\rightarrow F(-s) \end{aligned}$$

2. Linealidad:

$$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \rightarrow \alpha F_1(s) + \beta F_2(s) \quad \max(\alpha_1, \alpha_2) < \sigma < \min(\beta_1, \beta_2)$$

3. Desplazamiento:

$$f(t-a) \rightarrow e^{-as} F(s) \quad \alpha < \sigma < \beta$$

4. Convolución:

$$f_1(t) * f_2(t) \rightarrow F_1(s)F_2(s) \quad \max(\alpha_1, \alpha_2) < \sigma < \min(\beta_1, \beta_2)$$

5. Multiplicación:

$$\begin{aligned} f_1(t)f_2(t) &\rightarrow \frac{1}{i2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F_1(\xi)F_2(s-\xi)d\xi \\ \alpha_1 + \alpha_2 &< \sigma < \beta_1 + \beta_2 \\ \alpha_1 &< c < \beta_1 \\ \alpha_2 &< \sigma - c < \beta_2 \end{aligned}$$

6. Modulaci3n:

$$e^{-at}f(t) \rightarrow F(s+a) \quad \alpha < \sigma + \Re(a) < \beta$$

$$f(t) \cos(\omega t) \rightarrow \frac{1}{2}F(s-i\omega) + \frac{1}{2}F(s+i\omega) \quad \alpha < \sigma < \beta$$

7. Autocorrelaci3n:

$$f(t) * f(-t) \rightarrow F(s)F(-s) \quad |\sigma| < \min(|\alpha|, |\beta|)$$

8. Diferenciaci3n:

$$\begin{aligned} f'(t) &\rightarrow sF(s) & \alpha < \sigma < \beta \\ f^{(n)}(t) &\rightarrow s^n F(s) & \alpha < \sigma < \beta \end{aligned}$$

9. Integraci3n:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t f(\xi)d\xi &\rightarrow \frac{1}{s}F(s) & \max(0, \alpha) < \sigma < \beta \\ \int_t^{\infty} f(\xi)d\xi &\rightarrow \frac{1}{s}F(s) & \alpha < \sigma < \min(0, \beta) \end{aligned}$$

### **Funci3n de transferencia:**

En un sistema LIT de entrada  $x(t)$  y salida  $y(t)$  se cumple que  $y(t) = x(t) * h(t)$  donde  $h(t)$  es la respuesta al impulso del sistema, tenemos la funci3n de transferencia dada por  $H(s)$  que cumple:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Que son las transformadas de Laplace respectivas.

### **Transformada de Laplace unilateral:**

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \mathcal{L}_1\{f(t)\} \\ &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \\ &= \mathcal{L}\{f(t)\Gamma(t)\} \\ &= \mathcal{F}\{\Gamma(t)f(t)e^{-\sigma t}\} \\ &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+i2\pi u)t}dt \end{aligned}$$

### Nueva propiedad de la derivada:

$$\begin{aligned}
f'(t) &\rightarrow sF_1(s) - f(0) \\
f''(t) &\rightarrow s^2F_1(s) - sf(0) - f'(0) \\
f^{(n)}(t) &\rightarrow s^nF_1(s) - [f^{(n-1)}(0) + sf^{(n-2)}(0) + \dots + s^{n-2}f'(0) + s^{n-1}f(0)] \\
f^{(n)}(t) &\rightarrow s^nF_1(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0)
\end{aligned}$$

### Nueva propiedad de la integral:

$$\mathcal{L}_1 \left\{ \int f(t)dt \right\} = \frac{F_1(s)}{s} + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^0 f(t)dt$$

**Análisis de Estabilidad:** Diremos que la EDO será estable en el caso de que en el dominio de Laplace, la salida  $Y(s)$  no tiene polos de parte real mayor que 0 (a lo mas uno en 0). Se dirá además que es oscilatorio (y estable) si tiene 2 polos imaginarios puros ( $\pm bi$ ) y será simplemente oscilatorio en el caso de tener dos polos conjugados complejos ( $\alpha \pm i\beta$ ). En cualquier otro caso será inestable.

Es decir en el dominio del tiempo será estable si  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$  converge a 0 ó  $c$ , sera inestable si diverge ( $\pm\infty$ ) y oscilatorio si el límite no existe y es acotado. Es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} sY(s) \quad \wedge \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s)$$

### Mundo Discreto:

$$f[n] = (\dots, 0, 0, \underline{1}, 2, 0, 0, \dots) = (\underline{1}, 2)$$

Donde el subrayado representa que para  $n = 0$  se tiene ese valor.

$$\tilde{f}[n] = (\dots, 1, 2, 1, 2, \underline{1}, 2, 1, 2, 1, 2, \dots) = (\underline{1}, 2)$$

Estas representan funciones discretas periódicas.

### Muestreo:

Recordemos que gracias a la propiedad del cedazo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - nT) f(x) dx = f(nT)$$

Esto indica que  $\delta(x - nT)f(x)$  tiene area bajo su curva de  $f(nT)$ . Osea dicho impulso tiene una magnitud de  $f(nT)$ . Llamemos  $f_s(x)$  al tren de impulsos, notando que  $f_s(x)$  vale 0 siempre, excepto en los impulsos:  $f[n] = f(nT)$

$$\begin{aligned}
f_s(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - nT) \\
&= \frac{1}{T} \sqcup \left( \frac{x}{T} \right) f(x)
\end{aligned}$$

En este caso es un tren de impulsos unitarios, dado el factor  $1/T$ , como queremos un muestreo de area, multiplicamos por  $T$ , teniendo:  $f[n] = T f(nT)$

$$\begin{aligned} f_s(x) &= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - nT) \\ &= \sqcup \left( \frac{x}{T} \right) f(x) \end{aligned}$$

**Convertidor Análogo Digital (A/D):** Consiste en general en un dispositivo que transforma en una señal análoga a una digital, esta es un poco mas restrictiva que una discreta ya que muestrea la señal de forma ideal tanto en el tiempo (muestreo) como en la amplitud (cuantización).

**Teorema de Nyquist :** Si  $f(x) \rightarrow F(u)$  con  $F(u) = 0$  para frecuencias mayores que  $|u| > u_c$  entonces la señal muestreada

$$f_s(x) = \sqcup(x/T) f(x)$$

contiene la misma información si  $T < 1/2u_c$ , o sea una frecuencia de muestreo el doble a donde se hace cero la función en el dominio de la frecuencia.

$$U > 2u_c \rightarrow \frac{1}{U} < \frac{1}{2u_c} \rightarrow T < \frac{1}{2u_c}$$

**Convolución Discreta :** Se define la convolución discreta para funciones discretas  $f[n], g[n]$  de largo  $P$  y  $Q$  respectivamente :

$$f[n] *_l g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] g[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g[m] f[n-m]$$

La forma de realizar rápido este calculo consiste en poner una función y copiar la otra multiplicada abajo desplazada en uno y luego sumar; por ejemplo si queremos convolucionar: (1 3 2) con (2 1) hacemos:

$$\begin{array}{r} (1 \ 3 \ 2) *_l (2 \ 1) = \underline{2 \ 1} \\ \phantom{(1 \ 3 \ 2) *_l (2 \ 1) = } 2 \ 6 \ 4 \\ \phantom{(1 \ 3 \ 2) *_l (2 \ 1) = } \underline{1 \ 3 \ 2} \\ \phantom{(1 \ 3 \ 2) *_l (2 \ 1) = } 2 \ 7 \ 7 \ 2 \end{array}$$

Así finalmente:

$$(1 \ 3 \ 2) *_l (2 \ 1) = (2 \ 7 \ 7 \ 2)$$

**Convolución Cíclica :** Se define la convolución cíclica para funciones periódicas, ya que estas divergen bajo la convolución discreta común.

$$\tilde{f}[n] * \tilde{g}[n] = \sum_{m=0}^{Q-1} \tilde{f}[n-m|P] \tilde{g}[m]$$

Para esto hacemos lo mismo que la convolución anterior con un periodo, pero los últimos números (que sobran) se colocan en el espacio que teníamos libre, así para el ejemplo anterior, pero ahora periódico:

$$\begin{array}{r} (1 \ 3 \ 2) * (2 \ 1) = \underline{2 \ 1} \\ \phantom{(1 \ 3 \ 2) * (2 \ 1) = } 2 \ 6 \ 4 \\ \phantom{(1 \ 3 \ 2) * (2 \ 1) = } \underline{2 \ 1 \ 3} \\ \phantom{(1 \ 3 \ 2) * (2 \ 1) = } 4 \ 7 \ 7 \end{array}$$

Así finalmente:

$$(1 \ 3 \ 2) * (2 \ 1) = (4 \ 7 \ 7)$$

Es importantísimo notar que en este caso no es conmutativa la convolución. Además de que es obligatorio que la función discreta de la izquierda debe tener largo igual o mayor que la de la derecha, sino no es posible calcular la convolución cíclica.

**Respuesta al Impulso :** Siguiendo la misma idea que en el mundo continuo, definimos el impulso como:

$$\delta[n] = (1) = (\dots 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \dots)$$

Así podemos escribir una función discreta:

$$f[n] = f[n] *_l \delta[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] \delta[n-m]$$

En consecuencia si se tiene un sistema discreto  $L$  con entrada  $f(t)$  y salida  $g(t)$  podemos escribir la salida como:

$$g(t) = L \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] \delta[n-m] \right\}$$

Si definimos  $h[n, m] = L\{\delta[n-m]\}$  y como el sistema afecta en  $n$  tenemos:

$$g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] h[n, m]$$

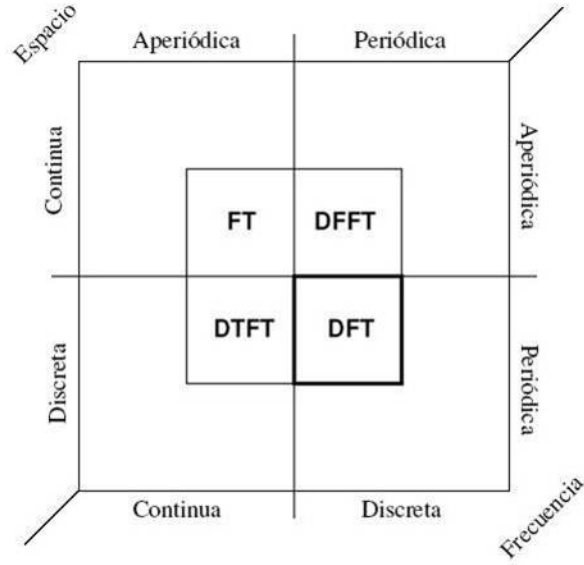
Además si el sistema es LIT, entonces

$$h[n, m] = h[n-m] = L\{\delta[n-m]\}$$

Y por lo tanto:

$$g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] h[n-m] = f[n] *_l h[n]$$

## Transformadas de Fourier Discretas:



**Transformada de Fourier de tiempo discreto (DTFT):** Una señal discreta en el tiempo (no periódica) se puede representar en muestras continuas y periódicas en el dominio de la frecuencia. Así aplicando FT a una función muestreada a intervalos regulares  $T$  como  $f_s(x) = \sqcup(x/T)f(x)$ ,  $f[n] = Tf(nT)$  tenemos:

$$\tilde{F}(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-i2\pi unT}$$

Que tendrá un periodo igual a la frecuencia de la función muestreada  $1/T$ . Además su transformada inversa esta dada por:

$$f[n] = T \int_0^{1/T} \tilde{F}(u)e^{i2\pi unT} du$$

**Transformada de Fourier de frecuencia discreta (DFFT):** Consiste en encontrar las componentes de Fourier discretas para una señal periódica y continua en el dominio del tiempo y espacio. Es decir una serie de Fourier. Para esto consideremos una función  $f(x)$  limitada en el espacio ( $x = 0$ , si  $x > 1/(2U)$ ) con transformada de Fourier  $F(u)$ , muestreando esta última, a intervalos de frecuencia  $U$  tenemos:

$$F[k] = UF(kU)$$

$$F_s(u) = \sqcup(u/U)F(u) = U \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(u)\delta(u - kU)$$

Así aplicando FT inversa, obtenemos la DFFT inversa:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[k]e^{i2\pi kUx}$$

con periodo  $T = 1/U$ . Aplicando FT a esta, y descartando donde es 0 (es decir integrando solo en un periodo la función original) tenemos la DFFT:

$$F[k] = U \int_0^{1/U} \tilde{f}(x)e^{-i2\pi kUx} dx$$

**Relación con las series de Fourier:** Comparando las fórmulas tenemos:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 x}$$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[k]e^{i2\pi kUx}$$

De aquí notamos fácilmente que si hacemos los cambios:

$$T = \frac{1}{U} \quad \wedge \quad \omega_0 = 2\pi U$$

entonces:

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{f}(x)e^{-ik\omega_0 x} dx \\ &= U \int_0^{1/U} \tilde{f}(x)e^{-i2\pi U k x} dx \\ &= DFFT(\tilde{f}(x)) \\ &= F[k] \end{aligned}$$

**Transformada de Fourier Discreta (DFT):** Esta se emplea para encontrar el contenido de frecuencia discreta de funciones discretas y periódicas. Al hacer el mismo análisis sobre el caso de la DFFT, pero ahora discretizando el tiempo, tenemos:

$$\tilde{f}_s(x) = \sqcup(x/T)\tilde{f}(x)$$

y entonces aplicando la DFFT sobre  $\tilde{f}_s(x)$  tenemos:

$$\tilde{F}[k] = UT \int_0^{1/U} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(nT)\delta(x - nT)e^{-i2\pi kUx} dx$$

*Citando a PIM:* Antes de continuar es necesario estudiar la relación entre  $U$  y  $T$ . Una función discreta puede ser periódica solo si el periodo es un múltiplo entero del intervalo de muestreo.



Llamemos  $N$  a este múltiplo. En el espacio, el intervalo de muestreo es  $T$  y el periodo es  $1/U$  (el inverso del intervalo de muestreo en la frecuencia), se tiene que  $NT = 1/U$ . O, en la frecuencia, el intervalo de muestreo es  $U$  y el periodo es  $1/T$  (el inverso del intervalo de muestreo en el espacio), se tiene que  $NU = 1/T$ . Es decir:

$$NUT = 1$$

Luego resolviendo la integral, obtenemos la DFT:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}[n] e^{-i2\pi kn/N}$$

Ahora para calcular la inversa se realiza el mismo análisis pero para la DFFT. Obteniéndose la DFT inversa:

$$\tilde{f}[n] = T \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{F}[k] e^{i2\pi kn/N}$$

En general tenemos  $T = 1$  por lo que:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}[n] e^{-i2\pi kn/N}$$

$$\tilde{f}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{F}[k] e^{i2\pi kn/N}$$

### Algunas Transformadas de Laplace extras:

$$\begin{aligned} t^\alpha \Gamma(t) &\rightarrow \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}} \quad , \quad \sigma > 0 \\ \ln(t) \Gamma(t) &\rightarrow -\frac{\ln(s) + \gamma}{s} \quad , \quad \sigma > 0 \\ \frac{1}{(s+a)^2} &\rightarrow te^{-at} \Gamma(t) \quad , \quad \sigma > -a \\ \frac{s}{(s+a)^2} &\rightarrow (1-at)e^{-at} \Gamma(t) \quad , \quad \sigma > -a \end{aligned}$$