

Sistemas de Potencia

1. Relaciones Básicas

En los sistemas monofásicos y trifásicos AC trabajaremos usando el valor efectivo RMS:

$$V = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$$

Con esto:

$$V = ZI \quad , \quad Z_c = \frac{1}{sC} = \frac{1}{j\omega C} \quad , \quad Z_l = sL = j\omega L \quad , \quad Z = R + jX$$

Recordando que la admitancia

$$Y = \frac{1}{Z} = G + jB = \left(\frac{R}{R^2 + X^2} \right) + j \left(\frac{-X}{R^2 + X^2} \right)$$

y en los sistemas trifásicos trabajaremos siempre en la fase positiva, y con esto

$$V_a = V_b \angle -120^\circ = V_c \angle -240^\circ$$

Que en el dominio del tiempo es:

$$V_a(t) = V_{max} \cos(\omega t)$$

con los respectivos desfases para las otras fases. Lo que queda representado en las fases de giro:

$$\bar{a} = e^{j120^\circ} = \frac{-1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \bar{a}^2 = e^{j240^\circ} = \frac{-1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad 1 + \bar{a} + \bar{a}^2 = 0$$

y con esto:

$$V_b = a^2 V_a \quad , \quad V_c = a V_a$$

Tenemos las relaciones entre línea-línea (o fase-fase) con la fase-neutro:

$$V_{ab} = \sqrt{3} V_a \angle +30^\circ \quad , \quad V_{bc} = \sqrt{3} V_b \angle +30^\circ = \sqrt{3} V_a \angle -90^\circ \quad , \quad V_{ca} = \sqrt{3} V_c \angle +30^\circ = \sqrt{3} V_a \angle -210^\circ$$

Definimos la potencia aparente (S) como la suma de la potencia activa (P) mas j por la reactiva (Q) definidos en RMS:

$$S = VI^* = P + jQ$$

con $S_{3\phi} = 3S_{1\phi}$.

2. Cálculos en tanto por uno (p.u.)

Consiste en hacer una base para el problema y transformar todos los dispositivos eléctricos en términos adimensionales. Nos aprovechamos de las relaciones:

$$I_b = \left(\frac{S_b}{V_b} \right)^* \quad , \quad Z_b = \frac{V_b^2}{S_b}$$

Los sectores quedarán separados por los transformadores que harán que tengamos distintos voltajes base en diferentes sectores. Es decir según el sector tendremos diferentes bases. Entender que las bases son números escalares reales, por lo que conjugar no hará nada. El algoritmo a realizar es el siguiente:

1. Identificar los sectores, separándolos según donde hayan transformadores.
2. Se elige una potencia de base común a todos los sectores S_b .
3. Se elige un voltaje base en algún sector $V_{b,n}$.
4. Por medio de las relaciones de los transformadores y partiendo del voltaje base elegido $V_{b,n}$ vamos identificando los voltajes en los otros sectores $V_{b,m}$:

$$\frac{V_{b,n}}{V_{b,m}} = \frac{a}{1} \longrightarrow \frac{V_{b,n}}{a} = V_{b,m}$$

donde a es la relación del transformador entre el sector n y m en ese orden.

5. Si es necesario calcular impedancia base y corriente base en cada sector usando:

$$I_{b,n} = \left(\frac{S_b}{V_{b,n}} \right)^* = \frac{S_b}{V_{b,n}} \quad , \quad Z_{b,n} = \frac{V_{b,n}^2}{S_b}$$

6. Transformar todas las impedancias de todos los sectores a la forma por unidad dividiendo por su respectiva impedancia base de su sector. Recordar que para transformar impedancias en base propia, se debe transformar a Z en Ω y luego dividir por su respectiva $Z_{b,n}$, vale decir si me dan r en bp:

$$Z_{\Omega} = r \cdot Z_{bp} = r \cdot \frac{V_{bp}^2}{S_{bp}} \longrightarrow Z_{pu} = \frac{Z_{\Omega}}{Z_{b,n}} = r \cdot \left(\frac{V_{bp}^2}{S_{bp}} \right) / \left(\frac{V_{b,n}^2}{S_{b,n}} \right)$$

Si la base propia y la base del sector son las mismas, entonces la impedancia en por unidad será igual a r .

3. Tetrapolos



Figura 1: Diagrama de un tetrapolo.

Ocurre que todo sistema eléctrico se puede expresar por circuitos equivalentes, con tetrapolos lineales pasivos. Estos relacionan el voltaje y corriente de entrada con la de salida por medio de una matriz:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \mathcal{A} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

con $\det(\mathcal{A}) = AD - BC = 1$. En general estos valores son complejos, si definimos:

1. $\mathbf{A} = A\angle\alpha$. Razón de transferencia de tensión en el vacío (circuito abierto, pues $I_2 = 0$) y entonces: $V_1 = \mathbf{A}V_2$.
2. $\mathbf{B} = B\angle\beta$. Razón de impedancia transferida en cortocircuito (pues $V_2 = 0$) y entonces $V_1 = \mathbf{B}I_2$
3. $\mathbf{C} = C\angle\gamma$. Razón de admitancia transferida en el vacío (circuito abierto, pues $I_2 = 0$) y entonces $I_1 = \mathbf{C}V_2$
4. $\mathbf{D} = D\angle\delta$. Razón de transferencia de corriente en cortocircuito (pues $V_2 = 0$) y entonces $I_1 = \mathbf{D}I_2$.

Recordemos que los tetrapolos conectados en cascada se cumple que la entrada es igual a la multiplicación de las matrices de parámetros por la salida, es decir:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

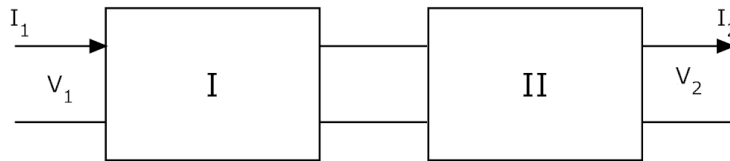
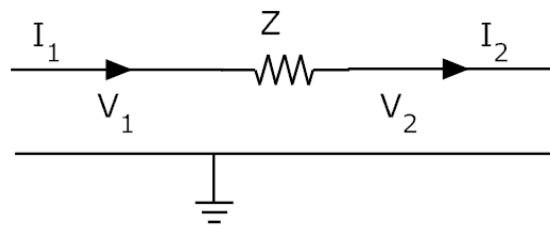


Figura 2: Tetrapolos en cascada.

Tetrapolos sencillos:

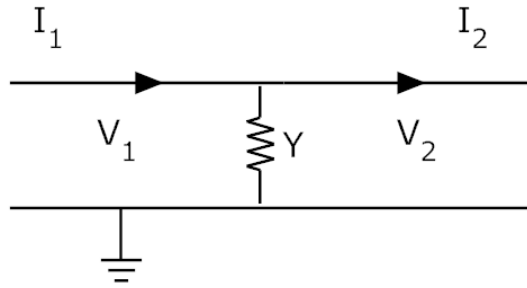
- Impedancia en serie Z :



Con matriz de parámetros:

$$\mathcal{A}_z = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

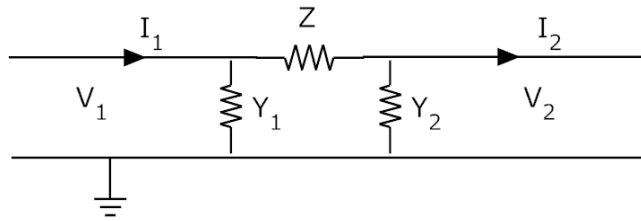
- Impedancia en paralelo o admitancia Y :



Con matriz de parámetros:

$$\mathcal{A}_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix}$$

- Modelo pi o π :



Con matriz de parámetros:

$$\mathcal{A}_\pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + Y_2 Z & Z \\ Y_1 + (Y_1 Z + 1) Y_2 & Y_1 Z + 1 \end{bmatrix}$$

Si $Y_1 = Y_2 = Y$ nos queda:

$$\mathcal{A}_\pi = \begin{bmatrix} 1 + YZ & Z \\ 2Y + Y^2 Z & YZ + 1 \end{bmatrix}$$

Así si queremos saber la salida en función de la entrada solo nos basta invertir la matriz, pero como tiene determinante 1, simplemente cambiamos las diagonales y ponemos signos cambiados a la antidiagonal. Vale decir:

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathcal{A}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

4. Flujo de Potencia

Consiste en resolver un problema clásico de circuitos, pero cuando ya no es lineal. Esto en general ocurre pues existe una carga que no dan su impedancia, sino cuanta potencia consume. Esto hace que el problema deje de ser lineal pues $S = VI^*$, y hay multiplicación de incógnitas.

4.1. Formulación Nodal de la red eléctrica

Para este método nos fijamos en los nodos o barras y se utilizan 2 variables:

1. La tensión de nudo $\hat{V} = V \angle \theta$
2. La corriente de nudo \hat{I} . Esta expresa la corriente neta inyectada en un nudo desde fuente o carga externa. Lo mismo ocurre para la potencia neta que representa $P_{neta} = P_{gen} - P_{cons}$.

Es importante notar que este modelo sigue siendo lineal, pero las condiciones de borde ya no lo son, y esto hace que el problema deje de ser lineal. Así al resolver el problema para cada nodo i (desde 1 hasta n) llegamos al problema:

$$\vec{I} = \mathbf{Y}\vec{V} \longrightarrow I_i = \sum_{j=1}^n Y_{ij}V_j$$

Donde \mathbf{Y} representa la matriz de admitancia ($n \times n$) que esta dada por:

1. **Elementos de la diagonal Y_{ii}** : esta dada por la suma de todas las admitancias que conectan al nodo i , es decir: $\sum_i y_i$ donde y_i representa cualquier admitancia que este conectada al nodo, incluida el *Shunt* que consiste en si hay condensadores conectados a tierra, que deben ser sumados al elemento de la diagonal.
2. **Elementos fuera de la diagonal Y_{ij}** : esta dada por la menos admitancia $-y_{ij}$ que conecta el nodo i con el nodo j . Si hay nodos que no están conectados tienen impedancia infinita, es decir admitancia cero. Aquellos nodos que no tienen impedancia entre ellos (admitancia infinita) son el mismo nodo.

Así con las ecuaciones:

$$\vec{I} = \mathbf{Y}\vec{V} \quad , \quad S_i = V_i I_i^* \quad \text{valida para cada nodo}$$

Donde S_i es la potencia neta inyectada a cada nodo, vale decir $S_i = S_{gen}^i - S_{cons}^i$.

4.2. Método de Gauss y Gauss-Seidel

El método consiste en resolver una ecuación $f(x) = 0$ por medio de iteraciones. El método más simple es intentar despejar x en función de todo lo demás y con esto: $x = F(x)$. Con esto nos damos un valor cualquiera para x y empezamos a iterar, reemplazándolo en $F(x)$. Con esto obtenemos un nuevo valor para x , digamos x_1 , que introduciéndolo de nuevo en $F(x)$ para obtener x_2 . Finalmente, la ecuación:

$$x_{i+1} = F(x_i)$$

La única diferencia entre ambos métodos, ocurre cuando actualizar un valor de x_i cuando trabajamos en varias variables (\vec{x}). Si esperamos que se cumpla un ciclo completo y luego cambiamos por completo el vector es el método de Gauss, mientras que si actualizamos lo antes posible cada valor de x_i estamos usando el método de Gauss-Seidel.

4.2.1. Método en el flujo de cargas

Así para el problema de flujo de potencia intentamos resolver \vec{V} y con esto tenemos todo. Usando la ecuación para cada nodo:

$$I_i = Y_{ii}V_i + \sum_{j=1}^{n, j \neq i} Y_{ij}V_j \longrightarrow V_i = \frac{1}{Y_{ii}} \left(I_i - \sum_{j=1}^{n, j \neq i} Y_{ij}V_j \right)$$

Así usando que:

$$I_i = \left(\frac{S_i}{V_i} \right)^*$$

tenemos la ecuación principal que permite resolver cualquier problema usando el método de Gauss (o Gauss-Seidel):

$$V_i = \frac{1}{Y_{ii}} \left[\left(\frac{S_i}{V_i} \right)^* - \sum_{j=1}^{n, j \neq i} Y_{ij}V_j \right]$$

válida para cada nodo i . Con esto nos ponemos a iterar según la barra.

1. **Barra de carga PQ:** En este nodo conocemos tanto P_i como Q_i y por ende conocemos $S_i = P_i + jQ_i$ (esto es potencia neta, generada menos consumida) con lo que de la ecuación principal podemos iterar directamente dándonos un V_i y modificando tanto el módulo como el ángulo.
2. **Barra de generación PV:** En este nodo conocemos tanto $|V_i|$ como P_i , con lo que con esto, debemos hacer lo siguiente:
 - a) Darse un valor arbitrario de V_i (empezar la iteración).
 - b) Usar que:

$$Q_i = \text{Im}\{S_i\} = \text{Im}\{V_i I_i^*\} = \text{Im} \left\{ V_i \sum_{j=1}^n (Y_{ij}V_j)^* \right\}$$

y con esto podemos obtener $S_i = P_i + jQ_i$.

- c) Podemos usar nuestra fórmula principal para iterar y obtener V_i . Solo guardamos el ángulo, puesto que $|V_i|$ ya es dato.
3. **Barra de slack (o referencia):** No necesitamos calcular nada, pues tenemos V_i y por ende I_i y por ende las potencias.

4.3. Método de Newton-Raphson

Nuevamente queremos resolver $f(x) = 0$. Para esto usamos la expansión en Taylor en torno a x_0 y truncamos en el primer término. Así:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \approx 0$$

Y con esto obtenemos:

$$x_{k+1} = x_k - (f')^{-1}(x_k)f(x_k)$$

Si tenemos en forma vectorial:

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - [J]^{-1}(\vec{x}_k)\vec{f}(\vec{x}_k)$$

Donde $[J]$ es la matriz jacobiana dada por:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

4.3.1. Método en el flujo de cargas

Así para el problema de flujo de potencia tenemos la siguiente ecuación para cada nodo i :

$$S_i = P_i + jQ_i = V_i I_i^* = V_i \sum_j (Y_{ij} V_j)^* = V_i \sum_j G_{ij} - jB_{ij} V_j^*$$

Así podemos definir nuestras funciones para usar Newton-Raphson para cada nodo ($\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j$):

$$\begin{aligned} P_i^{calc} &= V_i \sum_j V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) \\ Q_i^{calc} &= V_i \sum_j V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) \end{aligned}$$

Luego calculamos según la barra los distintos ΔP_i y ΔQ_i (en las barras PV se especifica P^{esp} y en las barras PQ se especifica P^{esp} y Q^{esp}), dados por:

$$\begin{aligned} \Delta P_i &= P_i^{esp} - P_i^{calc} \\ \Delta Q_i &= Q_i^{esp} - Q_i^{calc} \end{aligned}$$

En forma Matricial, la ecuación de Newton-Raphson en términos iterativos queda:

$$\vec{x}^1 - \vec{x}^0 = \Delta \vec{x}^0 = -[J(x^0)]^{-1} \vec{f}(\vec{x}^0)$$

donde (no colocaré mas los vectores ahora, asumir que es vectorial):

$$\Delta x_0 = \begin{pmatrix} \Delta \theta^0 \\ \Delta V^0 \end{pmatrix}, \quad \Delta \theta^0 = \begin{pmatrix} \Delta \theta_2^0 \\ \vdots \\ \Delta \theta_n^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_2^1 - \theta_2^0 \\ \vdots \\ \theta_n^1 - \theta_n^0 \end{pmatrix}, \quad \Delta V^0 = \begin{pmatrix} \Delta V_m^0 \\ \vdots \\ \Delta V_n^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_m^1 - V_m^0 \\ \vdots \\ V_n^1 - V_n^0 \end{pmatrix}$$

Notar que Δx_0 solo lleva $\Delta\theta_i$ si son barras PV , y lleva $\Delta\theta_k$ y ΔV_k si son barras PQ (notar que los ΔV_k son solo módulos, pues su ángulo esta en $\Delta\theta_k$ colocado antes). Esto quiere decir que el vector Δx^0 consiste en colocar todos los $\Delta\theta$ de todos los nodos PV y PQ seguido de todos los ΔV de los nodos PQ .

Lo mismo ocurre para la función del método que primero lleva todos ΔP de las barras PV y PQ , y luego lleva todos los ΔQ de las barras PQ

$$\vec{f}(x^0) = \begin{pmatrix} \Delta P^0 \\ \Delta Q^0 \end{pmatrix}, \quad \Delta P^0 = \begin{pmatrix} \Delta P_2^0 \\ \vdots \\ \Delta P_n^0 \end{pmatrix}, \quad \Delta Q^0 = \begin{pmatrix} \Delta Q_m^0 \\ \vdots \\ \Delta Q_n^0 \end{pmatrix}$$

Donde notemos que ΔQ parte de m pues solo son las barra PQ . Luego:

$$[J(x^0)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta P}{\partial \theta} & \frac{\partial \Delta P}{\partial V} \\ \frac{\partial \Delta Q}{\partial \theta} & \frac{\partial \Delta Q}{\partial V} \end{pmatrix}$$

Recordemos que para empezar el problema debemos darnos valores para el vector x^0 . En general nos damos 0° para los ángulos y 1 para los voltajes.

4.3.2. Método desacoplado

Consiste en asumir que la potencia activa solo depende del ángulo, y la reactiva solo del voltaje con lo que el jacobiano queda:

$$[J(x^0)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta P}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Delta Q}{\partial V} \end{pmatrix}$$

4.3.3. Flujo DC

Se usa una serie de suposiciones, dadas por:

$$|V_i| = 1, \quad G_{ij} = 0, \quad B_{ij} = \frac{-1}{x_{ij}}$$

Por otra parte:

$$\theta_{ij} \approx 0 \longrightarrow \cos \theta_{ij} = 1, \quad \sin \theta_{ij} = \theta_{ij}$$

Además de ignorar la potencia reactiva. Luego el problema queda simplemente como:

$$\theta = B^{-1}P$$

ya que: $P_{ij} = \frac{\theta_{ij}}{x_{ij}}$.

5. Regulación de Tensión

En la vida real, es necesario poder controlar las cosas, en particular el voltaje. Así yo quiero en el campus mantener el voltaje siempre a 380V (220 en fase-neutro) sin importar las fluctuaciones externas. Para ello se dispone de dos mecanismos:

- **Inyectar o remover reactivos:** Esto se hace usando condensadores (para inyectar reactivos al sistema) o usando reactores (inductancias) para remover.
- **Inyección de tensión serie:** Es decir usar transformadores con derivaciones (taps).

5.1. Control de Reactivos

En un sistema lineal, tenemos un voltaje V_1 y una potencia S_1 dado por un generador, una impedancia de línea dado por $Z = R + jX$ y tenemos un nodo de consumo con un voltaje V_2 y una potencia de consumo dada por $S_2 = P_2 + jQ_2$. Si imponemos $V_2 = V_2 \angle 0$ y asumimos que $V_1 = V_1 \angle \theta$ con un valor constante entonces:

$$V_1 - V_2 = \Delta V = IZ = \left(\frac{S_2}{V_2} \right)^* Z$$

Si calculamos la corriente que circula tenemos:

$$\Delta V = \frac{RP_2 + XQ_2}{V_2} + j \frac{XP_2 - RP_2}{V_2}$$

5.1.1. Caso particular: $\theta < 10^\circ$ unilineal

Si $\theta < 10^\circ$ nos queda:

$$\left| \underbrace{V_1}_{cte} - V_2 \right| = |\Delta V| = \frac{RP_2 + XQ_2}{V_2} = G$$

de la fórmula anterior podemos despejar Q en función de V_2 con lo que obtenemos una recta en función de P_2 :

$$Q = \frac{GV_2}{X} - \frac{R}{P} P_2$$

El término $\frac{GV_2}{X}$ se anota como Q_2^0 y se entiende como la inyección necesaria de Q si $P_2 = 0$ con lo que:

$$Q_2 = Q_2^0 - \frac{R}{X} P_2$$

donde Q_2 es la potencia necesaria a inyectar o retirar del nodo para regular el voltaje. Si al calcular obtenemos $Q_2 < 0$ significa que debemos inyectar potencia reactiva (introducir condensadores), si se obtiene $Q_2 > 0$ debemos poner reactores para remover potencia. Como sabemos el valor de P_2 dependerá de la hora del día, de cuantos proyectores y ampolletas están prendidos en el campus. Por lo que la inyección de reactivos depende del día. Esto se aprecia en el siguiente gráfico:

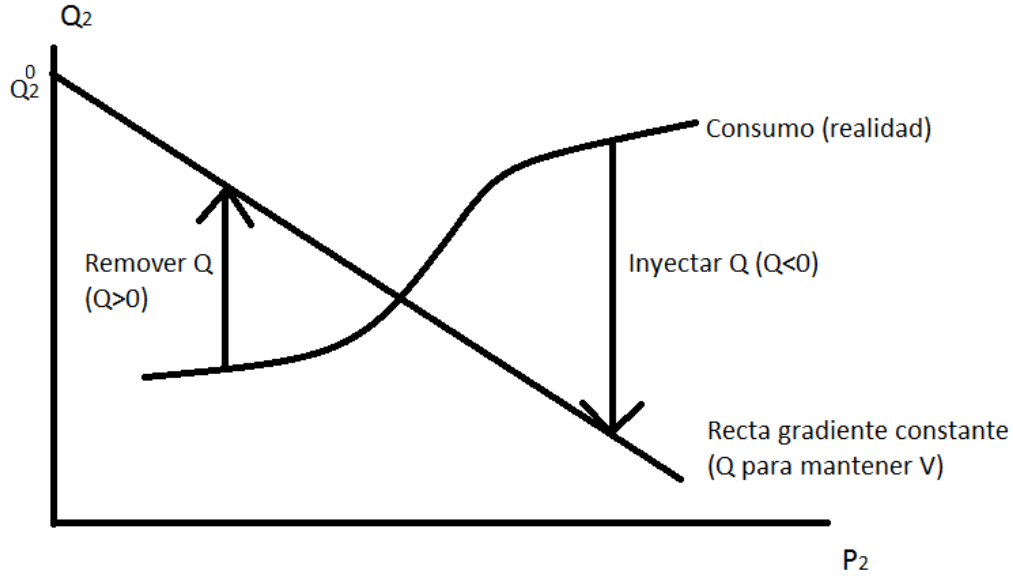


Figura 3: Gráfico de consumo.

Observación: Al parecer se ve confuso que para bajar Q haya que introducir potencia reactiva, esto se explica porque agregamos potencia reactiva al sistema lo que hace que nuestra potencia en el nodo baje. En general queremos que $R/X \ll 1$ para que una alta variación de potencia activa me haga variar muy poco el Q .

Otra forma además de la inyección de reactivos puede ser controlar el voltaje V_1 , es decir pedirle al generador que produzca o disminuya su generación. Cambiando V_1 lo único que cambia es $G = |\Delta V|$ con lo que cambia

$$Q_2^0 = \frac{|V_1 - V_2|V_2}{X}$$

y con esto desplazamos hacia arriba o hacia abajo la recta de gradiente constante. Esto nos permite crear un sistema mixto.

5.1.2. Caso General con muchos nodos

Para esto necesitamos el equivalente de Thevenin ($V_{th} = V_0$ y $Z_{th} = R_{th} + jX_{th} = R_s + jX_s$) del sistema visto desde nuestro nodo. La fórmula que nos entrega es:

$$\Delta V = \frac{\Delta P}{\frac{\partial P}{\partial V}} + \frac{\Delta Q}{\frac{\partial Q}{\partial V}}$$

donde $\frac{\partial P}{\partial V}$, $\frac{\partial Q}{\partial V}$ se conocen como los factores de influencia. Estos factores se obtienen como:

- No hay consumo en el nodo:

$$\frac{\partial Q}{\partial V} = -\frac{V_{th}}{X_{th}} = -\frac{V_0}{X_s} \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{V_{th}}{R_{th}} = -\frac{V_0}{R_s}$$

- Hay consumo en el nodo (V el voltaje que tengo en el nodo):

$$\frac{\partial Q}{\partial V} = \frac{V_{th} - 2V}{X_{th}} = \frac{V_0 - 2V}{X_s} \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial V} = \frac{V_{th} - 2V}{R_{th}} = \frac{V_0 - 2V}{R_s}$$

Luego la fórmula:

$$V_{final} - V_{inicial} = \Delta V = \frac{\Delta P}{\frac{\partial P}{\partial V}} + \frac{\Delta Q}{\frac{\partial Q}{\partial V}}$$

esta lista, con ΔV lo que deseo controlar, ΔP lo que varía en el día y ΔQ lo que debo inyectar o remover para controlar ΔV . Si no me dan de forma directa el voltaje Thevenin, puedo obtenerlo usando:

$$V_0 = |V + IZ_{th}| = \left| V + \left(\frac{S_{cons}}{V} \right)^* Z_{th} \right|$$

5.2. Transformadores con Taps

Es un medio efectivo cuando $\frac{\partial Q}{\partial V}$ es alto. No modifica los flujos reactivos (aunque modifica su repartición inicial). Luego si el trafo es ideal, tenemos:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{n} \longrightarrow \Delta V = V_2 - V_1 = V_1(n - 1) = V_2 \frac{n - 1}{n}$$

según lo que queremos podemos escoger n . Asumimos V_2 constante y V_1 variable. Esto no es ideal pues cambiar la razón de vueltas, hace variar el flujo de Q por lo que igualmente necesitamos un control de flujo de reactivos.

6. Operación Económica

Consiste en optimizar como manejar los generadores para reducir los costos al máximo. Recordar que hay costos fijos y costos variables, además de existir el costo marginal, que es cuanto cuesta aumentar un epsilon la producción.

6.1. Despacho uninodal

En este problema solo hay una barra y n generadores. Para resolver esto simplemente planteamos el Lagrangeano del problema:

$$\mathcal{L} = F_T + \lambda \left(P_{dem+per} - \sum_{i=1}^n P_i \right)$$

donde $P_{dem+per}$ es la potencia demandada total considerando las perdidas, $F_T = \sum_{i=1}^n F_i(P_i)$ es la función de costos de cada generador (que solo depende de su potencia generada).

6.1.1. Sin considerar las pérdidas en forma explícita

En este caso consideramos a las perdidas como constante y que se incluye como consumo. Considerando las condiciones de optimalidad del Lagrangeano ($\partial\mathcal{L}/\partial P_i = 0$ y $\partial\mathcal{L}/\partial\lambda = 0$) y lo anterior, llegamos:

$$\frac{\partial F_i(P_i)}{\partial P_i} = \lambda \quad , \quad P_{dem} + P_{per} = \sum_{i=1}^n P_i$$

En general en este tipo de problemas nos dan $H_i(P_i)$ que es su función de producir energía por hora [MBtu/h]. Si nos dan esto, debemos saber cuanto le cuesta producir un MBtu digamos c_i en [\$/MBtu], en general esto depende de que tipo de planta es. Luego como necesitamos la función de costos, simplemente

$$F_i(P_i) = H_i(P_i) \cdot c_i$$

con esto estamos listo para resolver el problema.

Restricciones de planta: En general las plantas tienen un límite de producción $P_i^{min} \leq P_i \leq P_i^{max}$, esto implica en las condiciones de optimalidad las condiciones K-K-T:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i(P_i)}{\partial P_i} &\leq \lambda \quad \text{para} \quad P_i = P_i^{max} \\ \frac{\partial F_i(P_i)}{\partial P_i} &\geq \lambda \quad \text{para} \quad P_i = P_i^{min} \end{aligned}$$

Esto quiere decir que cuando resolvemos un problema, podemos obtener que nos pasamos de los valores. Luego debemos imponer potencias máximas (o mínimas) de producción, y resolver nuevamente el problema. Y finalmente chequear que se cumplen las condiciones anteriores de Karush-Kuhn-Tucker.

6.1.2. Modelando las pérdidas

En este caso P_{per} es una función que depende de las variables de potencia, digamos $P_{per} \equiv P_{per}(P_1, \dots, P_n)$. Imponiendo las condiciones en \mathcal{L} nos queda:

$$\partial_{P_i} \mathcal{L} = 0 = \frac{\partial F_i(P_i)}{\partial P_i} + \lambda \frac{\partial P_{per}}{\partial P_i} - \lambda$$

despejando obtenemos:

$$\lambda = \left(\frac{1}{1 - \frac{\partial P_{per}}{\partial P_i}} \right) \frac{\partial F_i(P_i)}{\partial P_i} = FP_i \cdot \frac{\partial F_i(P_i)}{\partial P_i}$$

El factor:

$$FP_i = \left(\frac{1}{1 - \frac{\partial P_{per}}{\partial P_i}} \right)$$

se conoce como factor de penalización. En general este problema es no lineal, se recomienda usar Gauss-Seidel imponiendo valores iniciales para todos los P_i y que sean iguales al consumo. Luego con esto calcular $P_L = P_{per}$ y cuanto vale $\partial P_L / \partial P_i$, con esto tenemos un problema lineal, resolvemos para λ y los nuevos P_i sujetos a la nueva restricción $\sum P_i = P_{cons} + P_L$.

7. Estudio de Fallas

En un sistema trifásico balanceado es fácil resolver todo, puesto que simplemente se trabaja en forma monofásica y luego se desfasa todo. Si ocurre una falla, el problema cambia mucho, puede complicarse demasiado y hacerse muy no lineal. Para esto existe el método de la **transformación de Fortescue** o **transformación de componentes simétricas** que nos permite transformar 3 vectores, en 3 sistemas, uno de secuencia 0, otro de secuencia positiva y otro de secuencia negativa. Así si i_a , i_b y i_c son las corrientes que circulan por el sistema entonces (recordemos que $a = 1\angle 120^\circ$):

$$I_{abc} = \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_0 \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = CI_{012}$$

donde i_0 es una componente de la secuencia 0, i_1 es una componente de la secuencia positiva y i_2 es una componente de la secuencia negativa. Notar que evidentemente:

$$I_{012} = C^{-1}I_{abc} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{pmatrix} I_{abc}$$

Esto es completamente extendible a diferencias de voltajes. Lo que más complica este método es los modelos equivalentes de los parámetros de un sistema eléctrico cuando hacemos la transformación. Sobre todo de los transformadores que dependerá según su conexión la transformación a secuencia 0. El método sistemático para resolver los problemas es el siguiente:

1. Transformar el problema usual, en el de Fortescue, transformando cada componente usando su equivalente para generar 3 sistemas monofásicos desconectados.
2. Es recomendable transformar todo a su equivalente de Thevenin en el punto de la falla.
3. Realizar las conexiones de los sistemas monofásicos según el tipo de falla. Esto puede ser deducido de las ecuaciones de Fortescue y el tipo de falla.

7.1. Protecciones

Dado el alto costo de producir sistemas sin fallas, sale más económico producir un sistema de protecciones (para proteger los equipos, las personas, etc.) para cuando ocurran las fallas. En estos casos existirán distintas zonas de protecciones (casi para cada elemento del circuito) y que en general se traslapan las protecciones. En general existen 2 tipos de sistemas de protección. Los **cualitativos** que son en general comparar etapas de entrada y salida (con los problemas de costos y comunicaciones, pero con las ventajas de ser rápido y confiable). Los otros son **cuantitativos** que miden un parámetro, y si se supera este, se corta o se produce algo.

8. Transformadores

El transformador es un equipo de alto rendimiento que se estudia en Máquinas que permite transformar voltajes según la relación de vueltas entre las etapas. El funcionamiento monofásico es el conocido y presentado en Circuitos.

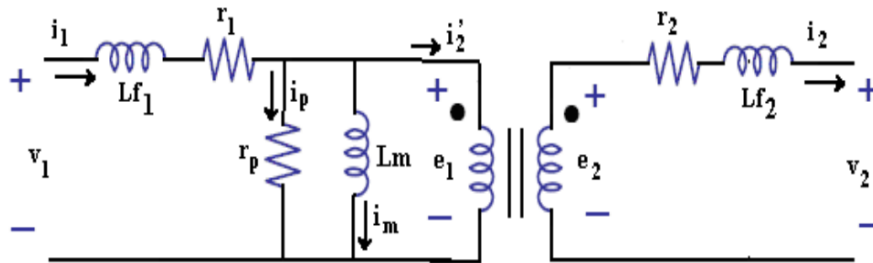


Figura 4: Circuito equivalente del Trafo Real.

donde:

- L_f representa que el flujo magnético no está confinado al núcleo.
- $r_{1,2}$ representa que los embobinados tienen resistencia.
- L_m la reluctancia no es despreciable.
- r_p hay pérdidas en el núcleo.

En SEP en general solo nos interesa modelar las reactancias en serie x . Además de modelar las conexiones trifásicas entre las fases. Destacamos 3 tipos de transformadores trifásicos:

- **Banco de Transformadores Monofásicos:** Consiste en usar un transformador monofásico para conectar entre fases (se usan 3 en total). En este existirá flujo para retornar, por lo que tendrá para retornar en secuencia cero. Al ser 3 trafos, serán fáciles de transportar, pero tendrá más costo, porque son 3 aparatos.
- **Acorazado (Shell):** Aquí ahorramos fierro, es un único trafeo trifásico. Y que si tiene camino para retorno de secuencia cero.
- **Núcleo (Core):** Aquí no hay retorno magnético. Por lo que no tendrá camino de retorno en secuencia cero.

8.1. Tipo de Conexión

Según sea el tipo de transformador y el tipo de conexión ($Y_t - D$, $Y - Y$, $Y_t - Y_t$) tienen una forma de leerse, donde se incluye un desfase. La forma es por ejemplo $Yy1$. Esto representa una conexión Y en el lado de alta, una conexión y en el lado de baja, y el 1 representa un desfase de $(1 \cdot 30^\circ)$ en el sentido de la secuencia positiva donde hay un aumento de 30° en sentido horario (osea -30°) desde Y hacia y (nótese que esto es distinto si fuese $yY1$). Así que si por ejemplo se cumplirá:

$$V_{alta} = V \angle 0 \rightarrow V_{baja} = v \angle -30$$

Al contrario en la secuencia negativa, el desfase será inverso.

Otro ejemplo puede ser $dY3$ esto significa que en el lado de baja hay delta y en el lado de alta hay estrella (no sabemos si esta a tierra o no, esto solo afectará la conexión de secuencia 0). El desfase es de $(3 \cdot 30 = 90^\circ)$ en sentido horario desde d hacia Y (es decir en -90°). Luego por ejemplo:

$$V_{baja} = v\angle 0 \rightarrow V_{alta} = V\angle -90^\circ \Leftrightarrow V_{alta} = V\angle 0 \rightarrow v_{baja} = v\angle 90^\circ$$

Estos desfases pueden modelarse como cajas en los circuitos equivalentes que multiplican (de izquierda a derecha) por el desfase producido (y que pueden desplazarse para resolver en forma mas simple un circuito). Fijarse mucho que se esta produciendo correctamente el desfase. Y el tipo de conexión (y el tipo de transformador) solo influye en la forma de la secuencia cero (ver clases).

9. Líneas de Transmisión

Las líneas de transmisión son los conductores que permiten trasladar la potencia. Son esenciales para la energía eléctrica y en este curso interesa modelarlas. Estos son conductores (no perfectos, y fasciculados o no) donde hay pérdidas y que deben ser modeladas. Las pérdidas disminuirán si se utilizan las líneas en mas tensión, por lo que según sea la distancia debe elegirse a que tensión se utilizan (pues es mas caro producir conductores que soporten o funcionen mejor a mayor tensión).

9.1. Parámetros Eléctricos de la línea

La línea debe ser modelada por unidad de longitud, pues es claro que entre cada longitud debe modelarse esto, y sus parámetros son dados en Ω/km o \bar{U}/km :

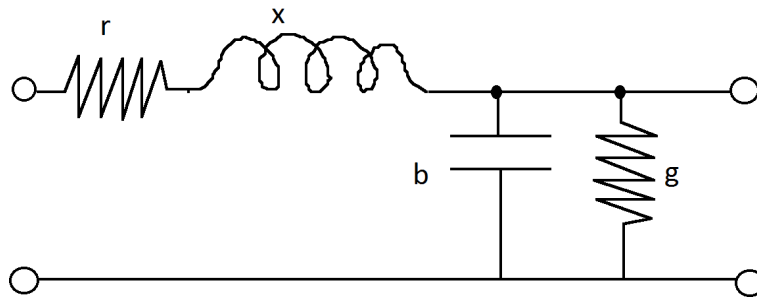


Figura 5: Línea de transmisión por unidad de longitud.

9.1.1. Resistencia de línea R

Este es un parámetro que depende esencialmente del tipo de material, sus dimensiones, temperatura y frecuencia. Estos valores se encuentran tabulados en distintas tablas (recordar la fórmula $r = \rho/A$).

9.1.2. Inductancia (o Reactancia) de línea L (X):

Este es el parámetro mas importante de la línea, y puede ser deducido considerando las interacciones magnéticas producidas en la línea. Si recordamos que $x = \omega L$ (con $\omega = 2\pi f$) se obtiene la fórmula (en Ω/m):

$$X = X_a + X_d = \left(4\pi f \cdot 10^{-7} \ln \left(\frac{1}{r'} \right) \right) + \left(4\pi f \cdot 10^{-7} \ln(D_{eq}) \right)$$

donde X_a corresponde al parámetro de conductor (medido en laboratorio generalmente) y donde

$$r' = r e^{-1/4}$$

y r el radio del conductor, y X_d el parámetro de la distancia de los conductores (interacción magnética de los conductores) y donde

$$D_{eq} = \sqrt[3]{D_{ab}D_{ac}D_{bc}}$$

la media geométrica de la distancia entre conductores.

9.1.3. Capacitancia paralelo (susceptancia) de línea C' (b o X_c):

En este caso las interacciones son debidas a campo eléctrico, típicamente se modela (en Ω/m):

$$X_c = \frac{1}{b} = X'_a + X'_d = \left(\frac{1}{4\pi^2 \epsilon_0 f} \ln \left(\frac{1}{r'} \right) \right) + \left(\frac{1}{4\pi^2 \epsilon_0 f} \ln(D_{eq}) \right)$$

donde r' y D_{eq} son los mismos parámetros mostrados en la sección anterior.

9.1.4. Conductancia paralelo G :

G no puede ser calculado en forma analítica, y generalmente se desprecia. Puede usarse para explicar el efecto corona y sus pérdidas.

9.2. Parámetros concentrados de línea

Nos interesa conocer la forma de modelar la línea en forma global, para ello definimos:

$$z = r + jx = r + j(X_a + X_d) \quad \wedge \quad y = g + jb = g + j \cdot \frac{1}{X_c} = g + j \cdot \frac{1}{X'_a + X'_d}$$

las impedancias y admitancias por unidad de longitud. De esto podemos definir:

$$\gamma = \sqrt{zy}$$

y además la impedancia característica de la línea:

$$z_0 = \sqrt{\frac{z}{y}} \quad \wedge \quad y_0 = \frac{1}{z_0} = \sqrt{\frac{y}{z}}$$

9.2.1. Parámetros ABCD

Con esto podemos calcular los parámetros ABCD (de tetrapolo) de la línea (de longitud L):

$$\begin{aligned} A = D &= \cosh(\gamma L) = \cosh(\sqrt{zy}L) \\ B &= z_0 \sinh(\gamma L) = z_0 \sinh(\sqrt{zy}L) \\ C &= y_0 \sinh(\gamma L) = y_0 \sinh(\sqrt{zy}L) \end{aligned}$$

Luego podemos realizar los modelos equivalentes:

9.2.2. Aproximado Impedancia Serie

Esta se utiliza si las distancias son cortas ($L < 75$ km) y bajas tensiones (< 100 kV). Se reemplaza la línea por una impedancia serie de valor $Z = zL$.

9.2.3. Aproximado Pi-Nominal

Se utiliza lo aproximado para líneas de mediano largo ($75 \text{ km} < L < 250 \text{ km}$):

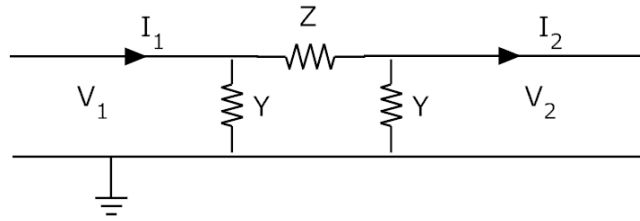


Figura 6: Modelo Pi-Nominal

En este caso los valores:

$$Z = zL \quad \wedge \quad Y = \frac{yL}{2}$$

y puede ser reemplazado por un modelo T juntando las admitancias y dividiendo la impedancia serie en 2.

9.2.4. Modelo Pi-Exacto

Este es el método exacto ($L > 250 \text{ km}$), que utiliza sus parámetros tal que sea equivalente a los parámetros ABCD (si lo vemos como tetrapolo):

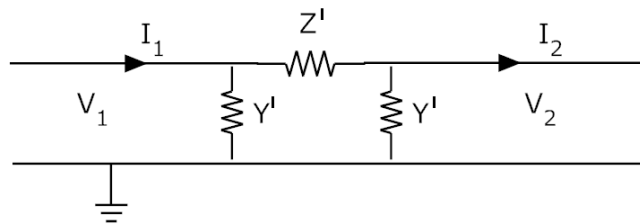


Figura 7: Modelo Pi-Exacto

con

$$Z' = z_0 \sinh(\gamma L) = B \quad \wedge \quad Y' = y_0 \tanh(\gamma L/2) = \frac{A-1}{B}$$

y que también puede expresarse como modelo T-exacto.

9.3. Comportamiento de la línea bajo diferentes condiciones de carga

- **Línea en vacío:** significa que no hay carga, lo que es un circuito abierto, lo que implica que $I_2 = 0$. Y como $V_1 = AV_2$ y en general $|A| < 1$ implica que $|V_2| > |V_1|$ y que mientras mas larga es la línea, mayor es el efecto. Es conocido como efecto *Ferranti*, que indica que la máquina que energiza la línea debe absorber reactivos.
- **Línea con carga natural:** La carga se refiere a la potencia S_0 que ocurre cuando se conecta una impedancia de carga natural z_0 . Cuando esto ocurre es claro que:

$$V_2 = I_2 z_0 \rightarrow I_2 = \frac{V_2}{z_0}$$

y por tanto:

$$S_2 = V_2 I_2^* = \frac{|V_2|^2}{z_0^*} = S_0$$

Este S_0 es lo que se conoce como la carga natural de la línea.

En este caso el gradiente de tensión viene dado por:

$$G = \frac{|V_1| - |V_2|}{|V_2|} = \frac{|V_2|(e^{\gamma L} - 1)}{|V_2|} = e^{\alpha L} - 1 \approx \alpha L$$

con $\alpha = \text{Re}(\gamma) = \text{Re}(\sqrt{zy})$. Y por último las pérdidas se pueden expresar como:

$$\Delta S = S_1 - S_2 = S_2(e^{2\alpha L} - 1) \approx \underbrace{2\alpha L}_{\ll 1} \cdot S_2$$

y es la carga que minimiza las pérdidas pues:

$$\Delta P = 2\alpha L |S_2| \cos(\angle z_0) \rightarrow \frac{\Delta P}{P_2} = 2\alpha L \text{ muy pequeño}$$

y

$$\Delta Q = 2\alpha L |S_2| \sin(\angle z_0) \approx 0$$

Esta potencia natural $S_0 = V_2^2/z_0^*$ es la típica que se da como parámetro de la capacidad de transmisión. Podemos además dar una definición aproximada independiente de la tensión, Surge Impedance Load (potencia activa de onda):

$$SIL(MW) = \frac{(kV_{nom})^2}{\text{Re}(z_0)}$$

▪ Línea distinta a la carga natural:

- Si $S_2 < S_0$ entonces:
 - Q generado (BV^2) > Q consumido (XI^2).
 - Línea es fuente de reactivos, necesidad de quitar reactivos colocando reactores.
 - G crece mas lento.
- Si $S_2 > S_0$ entonces:
 - Q generado < Q consumido.
 - Línea tiene falta de reactivos, por lo que es necesario agregar reactivos introduciendo condensadores.
 - G crece mas rápido (en general no esta permitido superar un 10% de la nominal).

9.4. Modelación de la secuencia cero de línea

Ya sabemos como modelar la secuencia positiva o negativa de una línea, según sean las longitudes de la línea y que modelo queramos usar. Ahora nos interesa modelar la secuencia cero. Para esto es necesario considerar a la Tierra, pues es un lugar por donde puede retornar la corriente I_0 y por lo tanto se hace necesario modelarla. Además se hace necesario considerar si la línea de transmisión tiene transposiciones o cable de guardia. Que sin duda afectarán por donde vuelve la corriente de

secuencia cero. Para ello en una línea trifásica consideramos a Carson, que en el pasado ya modeló esto, como una impedancia serie z_c en Ω/km que depende de los siguientes parámetros:

$$z_c = (r_c + jx_c) + r_e + j(x_e - 2x_{deq})$$

donde r_c es el parámetro del conductor, y x_c es lo usual dado por: $x_c = 4\pi f \cdot 10^{-7} \ln(1/r')$ la reactancia del conductor en Ω/km .

r_e viene dado por 3 veces la reactancia de tierra:

$$r_e = 3r_t = 3 \left(\frac{\pi}{4} \mu_0 f \cdot 10^3 = 0,987 \cdot 10^{-3} f [\Omega/km] \right)$$

y x_e es 3 veces la impedancia de Carson:

$$x_e = 3x_{de} = 3 (\mu f 10^3 \ln(D_e))$$

con D_e la distancia de Carson dada por:

$$D_e = 659,5 \ln \left(\sqrt{\frac{\rho}{f}} \right) [m]$$

y x_{deq} la reactancia producida por la distancia equivalente entre los conductores:

$$x_{deq} = \mu f 10^3 \ln D_{eq}$$